MAATALOUDEN TALOUDELLISEN TUTKIMUSLAITOKSEN JULKAISUJA N:o 3
PUBLICATIONS OF THE AGRICULTURAL ECONOMICS RESEARCH INSTITUTE, FINLAND, No. 3

LINEAARISEN OHJELMOINNIN KÄYTÖSTÄ MAATALOUDESSA

SAMULI SUOMELA · PAAVO KAARLEHTO
LAURI KETTUNEN

SUMMARY:
ON THE USE OF LINEAR PROGRAMMING IN AGRICULTURE

HELSINKI 1961

Maatalouden taloudellisen tutkimuslaitoksen julkaisuja № 3.
Publications of the Agricultural Economics Research
Institute, Finland, № 3.

LINEAARISEN OHJELMOINNIN KÄYTÖSTÄ MAATALOUDESSA

SAMULI SUOMELA • PAAVO KAARLEHTO
LAURI KETTUNEN

Summary

On the Use of Linear Programming in Agriculture

Helsinki 1961

Sisällys

Johdanto.

Lineaarinen ohjelmointi (l i n e a r p r o g r a m m i n g) voidaan määritellä tutkimus- ja suunnittelumenetelmäksi, jolla tietyin matemaattisin keinoin voidaan selvittää tarjolla olevien tuotantovälineiden käytön edullisin vaihtoehto, silloin kun ratkaistavaan probleemiin vaikuttavien osatekijöiden, lähinnä panoksen ja saadun tuotoksen välinen suhde on tunnettu lineaarinen funktio. Lineaarinen ohjelmointi on tämän yksinkertaisimman matemaattisen riippuvuussuhteen karakterisoimana eräs muoto siitä laajasta menetelmäryhmästä, jota nimitetään matemaattiseksi ohjelmoinniksi.

Menetelmä kehitettiin Yhdysvalloissa toisen maailmansodan aikana, kun oli ratkaistavana erilaisia pulmakysymyksiä, kuten esimerkiksi, millä tavalla ja mitä reittejä kulkien voitiin riittämättömällä tonnistolla saada eniten sotamateriaalia kuljetetuksi eri puolilla maapalloa oleville sotanäyttämöille. Sodan jälkeen on menetelmä levinnyt eri aloille ja varsinkin Yhdysvalloissa on tehty paljon työtä menetelmän edelleen kehittämiseksi ja sen käyttömahdollisuuksien lisäämiseksi. Maataloudessa sitä on ryhdytty käyttämään lähinnä taloudellisten kysymysten ratkaisussa ja erityisesti se on ollut liiketalouden tutkijoiden mielenkiinnon kohteena. Sinänsä ei menetelmä silti ole sidottu vain talouden alalle, vaan sitä voidaan yhtä hyvin käyttää kaikilla muillakin maatalouden aloilla, sikäli kun joudutaan selvittämään sellaisia kysymyksiä, jotka luonteeltaan soveltuvat lineaarisella ohjelmoinnilla ratkaistaviksi.

Kun menetelmään liittyvä suomenkielinen terminologia puuttuu käytännöllisesti katsoen kokonaan, on tämän työn yhteydessä esiin tulleiden keskeisimpien nimitysten suomenkielisistä vastineista keskusteltu useiden muiden tutkijoiden kanssa ja laadittu tältä pohjalta yhtenäinen sanasto, jota seuraavassa käytetään. Itse menetelmän nimitykseksi on muilla aloilla jo vakiintuneen käytännön mukaisesti omaksuttu lineaarinen ohjelmointi, vaikka tämä nimitys maatalouden piiriin sovellettuna vaikuttaakin oudolta. Ohjelmoinnin sijasta olisi analogisesti maatalousterminologiaan sopinut paremmin suunnittelu, koska esim. tilan tuotanto- tai taloussuunnitelmastakaan ei käytetä ohjelma-nimeä.

Tämän esityksen tarkoituksena on muutamien eri tyyppiä olevien esimerkkien avulla valaista lineaarisen ohjelmoinnin tekniikkaa ja käyttöä sekä samalla lyhyesti tarkastella menetelmän käyttömahdollisuuksia niiden kysymysten yhteydessä, jotka nimenomaan suomalaisessa maataloudessa tulevat kysymykseen. Tavoitteena on ollut, että nekin, jotka eivät ko. menetelmää ennestään tunne, pystyisivät ratkaisemaan ainakin yksinkertaisia tehtäviä esimerkeissä esitettyjen menettelytapojen mukaan. Tässä esityksessä ei siten ole pyritty selvittämään lineaarisen ohjelmointimenetelmän matemaattista perustaa. Se ei myöskään ole menetelmän käyttämiselle ehdottoman välttämätöntä. Pääasia on, että tunnetaan pääperiaatteet, joihin menetelmä nojautuu ja joiden perusteella sen käyttömahdollisuuksia ja saatujen tulosten merkitystä pystytään arvostelemaan.

Aluksi on esitetty johdantona graafinen ratkaisu, jota tosin voidaan käyttää vain kahden muuttujan probleemeissa. Varsinainen numeerinen ratkaisumenetelmä, simplex-menetelmä, on esitetty toisessa, maksimointiesimerkissä, jota on vielä laajennettu lisäämällä siihen vaihtuvat hinnat. Minimointitehtävien ratkaisussa käytettävien menetelmien selvittämiseksi on esitetty rehuseosprobleemi ja kasvinviljelyn sijoittamisprobleemi. Lopuksi on parissa esimerkissä käsitelty kuljetusprobleemeja, jotka voidaan ratkaista simplex-menetelmällä, mutta joita varten on kehitetty vieläkin yksinkertaisempia ratkaisumenetelmiä.

Niitä varten, jotka haluavat enemmän perehtyä itse menetelmään ja sen perusteisiin, on jo olemassa runsaasti varsinkin amerikkalaisia julkaisuja. Niistä mainittakoon tässä ohjelmoinnin varsinainen kehittäjä DANTZIG (1951), CHARNES, COOPER ja HENDERSON (1953) sekä DORFMAN, SAMUELSON ja SOLOW (1958) ja nimenomaan maataloutta varten sovellettu HEADY ja CANDLER (1958). Edellä mainituissa julkaisuissa, joissa varsin yksityiskohtaisesti selostetaan lineaarista ohjelmointimenetelmää, on edelleen mainittu lukuisa määrä muita lähdeteoksia. Lyhyitä, mutta selväpiirteisiä esityksiä yksinkertaisista lineaarisen suunnittelun sovellutuksista maataloudessa ovat julkaisseet mm. BOLES (1955) sekä BOWLEN ja HEADY (1955). Menetelmää käsittelevistä ruotsinkielisistä julkaisuista mainittakoon RENBORGin (1957) tekemä suppeahko tutkimus, johon liittyy runsas kirjallisuusluettelo. Suomessa on probleemia käsitellyt VARTIAINEN (1960).

1. Lineaarisen ohjelmoinnin yleiset periaatteet.

Niiden ongelmien, joita lineaarisen ohjelmoinnin puitteissa voidaan käsitellä, tulee periaatteessa täyttää ainakin seuraavat kolme edellytystä. Ratkaisukohteena täytyy olla jokin mitattavissa oleva suure, jonka määrä pyritään maksimoimaan tai minimoimaan. Esimerkiksi talouden suunnittelussa on tavoitteena tavallisesti taloudellisen tuloksen saaminen käytettävissä olevin edellytyksin niin hyväksi kuin mahdollista. Päinvastainen tapaus, minimitavoite, taas on esimerkiksi silloin, kun tietyt vaatimukset täyttävä rehuseos pyritään aikaansaamaan niin halvoista rehuista kuin mahdollista. Toisena edellytyksenä on, että tavoite voidaan saavuttaa useammalla kuin yhdellä tavalla, ts. että on olemassa eri vaihtoehtoja käytettävissä olevien tuotantovälineiden käytölle, ja kysymyksessä on edullisimman vaihtoehdon löytäminen. Ellei useampia mahdollisuuksia ole olemassa tai kysymykseen tulevia vaihtoehtoja on vain muutama, on lineaarisen ohjelmoinnin käyttö tarpeeton. Kolmantena lineaarisen ohjelmoinnin edellytyksenä ja sille ehkä kaikkein luonteenomaisimpana piirteenä on se, että jotkut käytettävissä olevista tuotantovälineistä ovat määrältään rajoitettuja. Tällaisina rajoituksina voivat olla esimerkiksi pinta-ala, työvoima, käytettävissä oleva pääoma, rakennusten koko, tietyn työkoneen kapasiteetti jne.

Lineaarisessa ohjelmoinnissa voidaan erottaa kaksi päävaihetta. Ensimmäinen tehtävä on asettaa tavoite, johon suunnittelussa pyritään, sekä selvittää esim. tuotantosuunnitelmaa ratkaistaessa käytettävissä olevat tuotantovälineet ja mahdolliset erikoisehdot, jotka lopullisen suunnitelman on täytettävä. Niin ikään on määriteltävä ne tuotannonalat, jotka saattavat tulla kysymykseen, sekä kunkin tuotannonalan vaatimat tuotantovälineiden määrät yksikköä kohti samoin kuin sen antama suhteellinen ylijäämä (tai yleensä tavoitteena oleva suure). Ensimmäinen vaihe edellyttää siten yksinomaan alan ammattimiehen työtä samaan tapaan kuin esimerkiksi taloussuunnitelman teko ja muut vastaavat tehtävät riippumatta siitä, mitä menetelmää käytetään. Toisena vaiheena on kysymyksessä olevan ongelman ratkaiseminen, joka itse asiassa on vain "sokea" teknillinen laskutoimitus, joka antaa vastauksen siihen, mikä vaihtoehto asetetuilla edellytyksillä antaa parhaimman tuloksen.

Ennenkuin ryhdytään tarkastelemaan lähtökohtataulukon muodostamista ja laskemistyön teknillistä suoritusta, on syytä mainita ne olettamukset, joihin menetelmä osaltaan nojautuu ja jotka on syytä tuntea, jotta pystyttäisiin arvioimaan menetelmän käyttömahdollisuuksia ja sen antaman lopputuloksen merkitystä. Keskeiset olettamukset ovat seuraavat.

Lineaarisuus. Tämä tarkoittaa sitä, että kunkin tuotannonhaaran kohdalla on tuotoksen ja käytetyn tuotantovälineen suhde muuttumaton, suoraviivainen ja riippumaton siitä, millä tasolla tuotantoa harjoitetaan. Siis, jos yksi hehtaari kevätvehnää vaatii 40 työtuntia, niin kaksi hehtaaria vaatii 80, kolme hehtaaria 120 jne. Samaten, jos 100 kiloa salpietaria antaa 200 kilon sadonlisäyksen, niin 200 kilon oletettaisiin antavan 400 kilon lisäyksen jne. Tämä johtaa mm. siihen, että mikäli vaihtoehtoina on olennaisesti erilaisia lannoitteiden käyttömääriä, ne on käsiteltävä kukin erillisenä tuotannonhaarana, koska lannoitemäärän ja sadonlisäyksen suhdetta ei voida pitää käytännön suunnittelussakaan suoraviivaisena muuta kuin kysymyksen ollessa suhteellisen vähäisestä lannoitemäärien vaihtelusta.

Yhteenlaskettavuus. Se tarkoittaa, että kaksi tai useampia tuotannonhaaroja voi sisältyä tuotantosuunnitelmaan ilman, että se aiheuttaa mitään muutosta kunkin yksityisen tuotannonhaaran tuotoksessa tai tuotantovälineiden käytössä. Toisin sanoen suunnitelman kokonaistuotto on kunkin tuotannonhaaran antamien tuottojen summa ja tuotantovälineiden yhteismäärä on sama kuin kunkin tuotannonhaaran vaatimien tuotantovälineiden summa. Sen vuoksi ei voida erillisinä vaihtoehtoina käsitellä sellaisia tuotannonhaaroja, joilla on keskinäistä vuorovaikutusta. Tällä on merkitystä mm. silloin, jos viljelykiertojen kasvijärjestys eri tapauksissa muodostuu hyvin erilaiseksi, jolloin tietyn kasvin satotasoon tulee vaikuttamaan se, mitä muita kasveja suunnitelmaan tulee sisältymään. Niin ikään eri tuotannonalojen työnmenekkiin vaikuttaa se, mitä muuta tilalla samanaikaisesti tuotetaan.

Jaettavuus tarkoittaa sitä, että jokainen vaihtoehtoinen tuotannonhaara voi sisältyä suunnitelmaan missä hyvänsä käytettävissä olevien tuotantovälineiden sallimassa positiivisessa määrässä. Tämä olettamus ei maataloudessa yleensä tuota vaikeuksia, koska useimmat yksiköt ovat pieniä ja jaettavia. Jos laskelmallinen lopputulos osoittaisi, että edullisinta on pitää ympäri vuoden 5.8 lehmää, niin tämän pyöristäminen suunnitelmaa toteutettaessa kuudeksi ei aiheuta mitään olennaista vaikeutta käytännön taloudessa. Jos sen sijaan kysymyksessä ovat hyvin suuret yksiköt, ei pyöristäminen aina ole oikeutettua. Tuloksen osoittaessa esim., että olisi rakennettava 2.5 laivaa, jouduttaisiin käytännössä suuren yksikön ollessa kysymyksessä liian epämääräiseen tulokseen.

Äärellisyys. Tämä olettamus tarkoittaa sitä, että tuotantovälineiden ja rajoitusten lukumäärä ja siis myös kysymykseen tulevien vaihtoehtojen määrä on äärellinen. Kysymyksessä on vain käytännöllinen edellytys, sillä äärettömän monien vaihtoehtojen selvittäminen olisi jo työmäärän takia käytännössä mahdotonta. Useampien kymmenien vaihtoehtojen huomioon ottaminen ei vielä merkitse ylivoimaisia laskennallisia vaikeuksia.

Lähtökohta-aineiston yksiselitteisyys tarkoittaa sitä, että laskennan perustana oleva numeromateriaali tulee ohjelmoinnissa käsitellyksi numeroarvoltaan ehdottomana. Jos esim. korjuukauden työnmenekin enimmäismääräksi on asetettu 270 tuntia, saadaan tulos täsmällisesti sen mukaisena, vaikka 275 tunnin mukaan laskien lopullinen suunnitelma olisi voinut olla kokonaan toinen ja edullisempi. Sen vuoksi on tarkoin harkittava, mitä rajoituksia tuotantovälineiden käyttömääriin kulloinkin on tarpeen asettaa.

Lineaarisen ohjelmoinnin sisältöä voidaan valaista yksinkertaisen esimerkin avulla. Olettakaamme, että kotieläintuotannon vaatima osa viljelysuunnitelmasta on selvitetty, ja käyttämättä on vielä 5 ha peltoa, jonka viljely voidaan järjestää yksinomaan myyntituotantoa silmällä pitäen. Olettakaamme edelleen, että vallitsevat olosuhteet, kuten maalaji, viljelmällä käytettävissä olevat koneet ja kalusto sekä muut paikalliset olosuhteet aiheuttavat, että kysymykseen saattaa tässä tapauksessa tulla vain joko kevätvehnän tai perunan tai näiden molempien viljely. Näistä vaihtoehtoina olevista tuotannonhaaroista käytetään lineaarisen ohjelmoinnin yhteydessä nimitystä tuotantoprosessi. Oletetaan vielä, että korjuuajan vaatiman muun työn huomioon ottaen ei kysymyksessä olevan 5 ha:n korjuuseen voida käyttää enempää kuin 1 000 työtuntia, koska työn huippu kokonaisuudessaan muuten muodostuisi liian korkeaksi ja aiheuttaisi liian suuren riskivaaran epäedullisten säiden sattuessa. Kun vielä oletetaan, että kevätvehnän työnmenekki korjuuaikana on 120 t/ha ja suhteellinen ylijäämä 48 000 mk/ha sekä perunan työnmenekki korjuun osalta 300 t/ha ja suhteellinen ylijäämä 80 000 mk ha:lta, ovatkin tarvittavat alkutiedot valmiina. Suhteellisen ylijäämän (nettoarvon) laskemisessa on otettava huomioon, että tuotantoprosessin antamasta tuotosta vähennetään vain muuttuvat kustannukset, toisin sanoen kaikki sellaiset kustannukset, jotka nimenomaan aiheutuvat asianomaisesta tuotannosta ja joita tilalla ei siten olisi tai joita vastaavat tuotantovälineet voitaisiin käyttää muulla tavoin, jos mainittua tuotantoa ei harjoitettaisi.

Vaihtoehtoisina tuotantoprosesseina ovat siten kevätvehnä ja peruna, ja tuotantoa rajoittavina tekijöinä (restrictions) pinta-ala ja korjuukauden työnmenekki. Vehnän kohdalla muodostuu rajoittavaksi tekijäksi pinta-ala, sillä 5 ha:n korjuu vaatii 600 työtuntia, jolloin 400 t jää vielä käyttämättä. Perunaa sensijaan voidaan viljellä korkeintaan 3.33 ha, jolloin koko työtuntimäärä 1000 t on käytetty. Tehtävänä on nyt ratkaista, mikä on edullisin tuotantosuunnitelma eli mitä viljelemällä saadaan suurin ylijäämä.

Jos merkitsemme vehnän pinta-alaa X_1:llä ja perunan X_2:lla, voimme kirjoittaa peltoalan ja korjuuajan työnmenekkirajoitukset seuraavien epäyhtälöiden muotoon:

(1) $X_1 + X_2 \leqq 5$ (peltoalan rajoitus)

(2) $120\ X_1 + 300\ X_2 \leqq 1000$ (työnmenekin rajoitus)

Negatiivisia pinta-alamääriä ei voida viljellä, joten

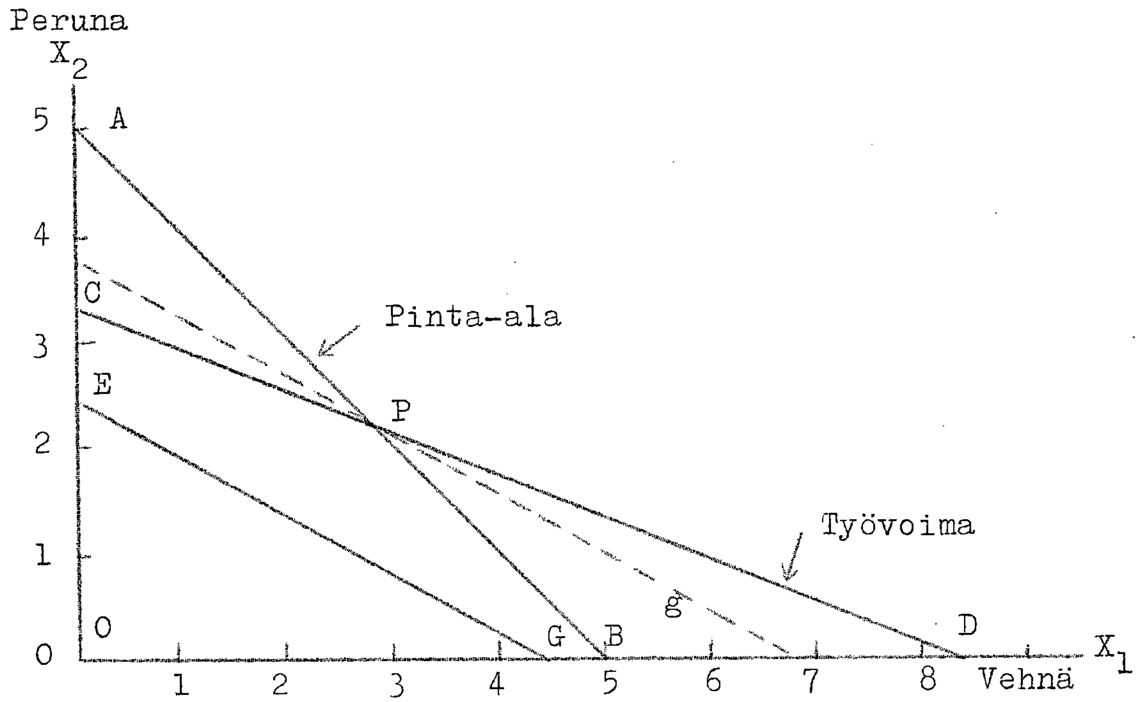
(3) $X_1, X_2 \geqq 0$

Kunkin viljelysuunnitelman nettoylijäämä saadaan lasketuksi yhtälöstä:

(4) $F = 48\ 000\ X_1 + 87\ 000\ X_2$

Tehtävänä on määrätä X_1 ja X_2 siten, että F saa mahdollisimman suuren arvon, samalla kun epäyhtälöt (1), (2) ja (3) pysyvät voimassa. Tällaisen tehtävän, joka sisältää vain kaksi muuttujaa, voimme ratkaista graafisestikin.

Kuvioon 1. (vrt.s.10) piirretyt suorat AB ja CD edustavat epäyhtälöitä (1) ja (2), kun niissä on otettu huomioon vain yhtäsuuruusmerkit. Kaikki ne pisteet, jotka ovat suoran AB vasemmalla puolen, toteuttavat epäyhtälön (1) ja koska X_1 ja $X_2 \geqq 0$, täyttävät vain suljetun alueen OAB pisteet pinta-alarajoituksen. Samalla tavalla suora CD rajoittaa suljetun alueen OCD, jonka jokainen piste toteuttaa epäyhtälön (2). Näiden kahden alueen yhteisellä suljetulla alueella OCPB ovat kaikki kolme epäyhtälöä yhtä aikaa voimassa, ja tästä alueesta on siis löydettävä se X_1:n ja X_2:n kombinaatio, joka ko. epäyhtälöiden voimassa ollessa maksimoi tuoton. Suora EG edustaa yhtälöä (4) tietyllä F:n arvolla. Optimiratkaisua vastaava suora on yhdensuuntainen EG:n kanssa. Tehtävänä on nyt löytää alueelta OCPB piste,



Kuvio 1. Käytettävissä olevan pinta-alan ja työvoiman asettamat rajoitukset vehnän ja perunan viljelylle.

jonka kautta piirretty EG:n suuntainen suora g leikkaa X_2-akselin mahdollisimman "ylhäältä", jolloin vakio F saa maksimiarvonsa. Piste P ilmeisesti täyttää tämän vaatimuksen. Pisteen P koordinaateiksi saadaan silmämääräisesti $X_1 \doteq 2.8$ ha ja $X_2 = 2.2$ ha, eli edullisin ratkaisu on viljellä vehnää 2.8 ha ja perunaa 2.2 ha. Nettotuotto muodostuu tällöin 325 800 mk:ksi. Vertailun vuoksi mainittakoon, että yksinomaan vehnää viljelemällä (5 ha) olisi tuotto 240 000 mk ja perunaa viljelemällä käytettävissä olevan työmäärän puitteissa (3.33 ha) 287 000 mk.

2. Maatilan tuotanto- ja taloussuunnitelma.

a. Kiinteähintainen ohjelmointi.

Kun seuraavassa esitetään lineaarisen ohjelmointimenetelmän käyttöä aina käytetyn laskumenetelmän yksityiskohtiin asti menevän esimerkin valossa, on tarkoituksenmukaista valita esimerkki siten, että sen teknillinen käsittely ei paisu liian laajaksi. Tässä tarkoituksessa on laskelman kohteeksi valittu tila, jonka probleemina on kevätkylvöjen suunnittelu. Suunnittelutilanne on siis sikäli yksinkertaistettu, että valinta ei koske taloutta ja tuotantoa koko laajuudessaan, vaan kotieläinmäärä, katsotaan vakioksi ja sitä varten tarvittava rehunviljelyala jo etukäteen varatuksi. Valintaa ei näin ollen tarvitse suorittaa myytävien kasvinviljelytuotteiden viljelylaajuuden ja kotieläintalouden tai karjamäärän välillä. Tällaisessa tilanteessa voidaan myös, kun valinta tapahtuu erittäin lyhyellä tähtäimellä - vain yhtä kasvukautta silmälläpitäen - pitää kiinteinä suurta osaa sellaisia kustannuksia, jotka normaalissa pitkäjännitteisessä taloussuunnitelmassa on katsottava muuttuviksi.

Esimerkissä on ratkaistavana kylvösuunnitelma, kun valittavana on kevätvehnän, ohran, perunan ja sokerijuurikkaan viljely. Lineaarisen ohjelmoinnin kolme pääperiaatetta, tavoite, vaihtoehdot ja rajoitukset ovat siten esimerkkitapauksessa seuraavat. Tavoitteena on valita viljeltäväksi sellaiset kasvit ja kukin siinä laajuudessa, että käytettävissä olevat tuotantovälineet huomioon ottaen saadaan viljelijän kannalta katsoen paras mahdollinen taloudellinen tulos. Tässä tapauksessa taloudellinen tulos voidaan mitata suhteellisena ylijäämänä siten, että viljelyn antamasta kokonaistuotosta vähennetään kussakin tapauksessa aiheutuneet välittömät kustannukset. Vaihtoehtoina on kevätvehnän, ohran, perunan ja sokerijuurikkaan viljely. Voidaan viljellä joko näitä kaikkia, joitakin niistä tai vain yhtä sen mukaan, mikä osoittautuu edullisimmaksi. Kolmantena ja erittäin keskeisenä osana ovat tuotantovälineiden käyttömäärien rajoitukset.

Ongelman ratkaisemisessa on ensimmäisenä selvitettävä kunkin vaihtoehdon antama suhteellinen ylijäämä. Kaikki luvut lasketaan tiettyä ja nimenomaan samaa yksikköä kohden, joka tässä tapauksessa on ollut peltohehtaari. On huomattava, että jos yhtenä tuotannon vaihtoehtona olisi ollut karjatalous, olisi myös karjatalouden tuotto, kustannukset ja suhteellinen ylijäämä ollut laskettava samaa yksikköä, siis peltohehtaaria kohden. Mainittakoon, että esimerkissä on perustana eräs lounaissuomalainen tila, jonka kirjanpitoon tilivuodelta 1956/57 työnmenekki, satotiedot ja soveltuvin osin muutkin tiedot perustuvat. Suhteellinen ylijäämä on esimerkiksi kevätvehnän kohdalta laskettu siten, että hehtaarisato, 1600 kiloa, on hinnoitettu silloisen yksikköhinnan mukaan, jolloin tuotoksi on saatu 67 200 mk. Siitä on vähennetty siemen-, lannoitus-, kasvinsuojeluaine- ja eräät sellaiset konekustannukset, jotka ovat välittömästi aiheutuneet kevätvehnän viljelystä. Nämä kustannukset ovat yhteensä olleet 18 600 mk hehtaaria kohden, joten suhteelliseksi ylijäämäksi jää 48 600 mk. Vastaavasti on saatu ohran kohdalla ylijäämäksi 42 700, perunan 87 400 ja sokerijuurikkaan 171 300 mk. On erityisesti huomattava, että tuottoa ja kustannuksia ei ole laskettava yleisten keskimäärien, vaan juuri asianomaisessa yksityistapauksessa kysymykseen tulevien määrien mukaan. Tämä koskee yhtä ehdottomasti myös seuraavaa vaihetta lineaarisen ohjelmoinnin valmistelussa, nimittäin sen selvittämistä, minkä verran kukin kasvi vaatii niitä tuotantovälineitä, joita on niukasti ja joiden enimmäismäärä sen vuoksi on tarkoin määritetty.

Keskeisenä ja käytännössä usein vaikeimpana tehtävänä lineaarisen ohjelmointimenetelmän käytössä on niiden rajoitusten täsmällinen esittäminen, jotka kysymyksessä olevissa olosuhteissa tulevat lopullisesti määräämään, miten paljon kutakin viljelykasvia voidaan tilalla viljellä. Rajoittavina tekijöinä on tässä yhteydessä 9 ha:n pinta-ala sekä käytettävissä olevan työvoiman määrä eri kausina. On huomattava, että sikäli kuin vierasta työvoimaa tilalla on käytetty, se on otettu jo huomioon vähennettävissä kustannuksissa. Työnmenekin kohdalla erotetaan neljä eri kautta: kylvö- ja muokkauskausi 15 päivää, harvennus- ja harauskausi 20 päivää, I korjuukausi 15 päivää ja II korjuukausi samoin 15 päivää. Alla olevassa asetelmassa esitetään käytettävissä oleva oma työvoima sekä eri viljelykasvien kohdalla eri työkausina todetut työnmenekkiluvut vähennettynä vieraan työvoiman määrällä.

	A	B	C	D
	Kylvö- ja muokk.kausi 15 pv.	Haraus- ja harv.kausi 20 pv.	Korjuukausi I 15 pv.	II 15 pv.
Kevätvehnä	10 t/ha	-	36 t/ha	-
Ohra	7 "	-	15 "	-
Peruna	36 "	40 t/ha	167 "	-
Sokerij.	16 "	115 "	-	163 t/ha
Käytettävissä omaa työtä	270 t	360 t	270 t	270 t

On luonnollista, että tässä kohdin asetetut rajoitukset tulevat vaikuttamaan aivan ratkaisevasti lopulliseen tulokseen, kuten jäljempänä tullaan näkemään. Niinpä on pantava jo tässä vaiheessa merkille, että ohran varsinainen korjuutyö, johon on laskettu 15 tuntia ha:lle, kevätvehnän sekä leikkuu- että korjuutyö ja perunan nosto on tässä esimerkissä ajateltu jouduttavan suorittamaan saman 15 päivän kauden kuluessa.

Edellä olevien lukuarvojen perusteella voidaan nyt laatia tuotantosuunnan valinnan perustana olevat epäyhtälöt seuraavasti:

$$(1)\quad 48\,600x_1 + 42\,700x_2 + 87\,400x_3 + 171\,300x_4 = Z \text{ (max)}$$
$$(2)\quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geqq 9.0$$
$$(3)\quad 10x_1 + 7x_2 + 36x_3 + 16x_4 \leqq 270$$
$$(4)\quad 40x_3 + 115x_4 \leqq 360$$
$$(5)\quad 36x_1 + 15x_2 + 167x_3 \leqq 270$$
$$(6)\quad 163x_4 \leqq 270,$$

missä

x_1 = vehnän pinta-ala ha:ssa
x_2 = ohran -"- -"-
x_3 = perunan -"- -"-
x_4 = sokerijuurikkaan -"-

Näistä yhtälö (1) on tuotantofunktio, epäyhtälö (2) osoittaa pinta-alarajoitusta ja epäyhtälöt (3), (4), (5) ja (6) työnmenekkirajoituksia. Näiden epäyhtälöiden muuttaminen yhtälöiksi suoritetaan lisäämällä kuhunkin lausekkeeseen ns. vajausmuuttuja (disposal activity), joka ilmaisee sen osan kustakin tuotantovälineestä, joka ehkä jää käyttämättä tuotantosuunnitelmaan hyväksytyissä prosesseissa.

$$(7)\quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 9.0$$
$$(8)\quad 10x_1 + 7x_2 + 36x_3 + 16x_4 + x_6 = 270$$
$$(9)\quad 40x_3 + 115x_4 + x_7 = 360$$
$$(10)\quad 36x_1 + 15x_2 + 167x_3 + x_8 = 270$$
$$(11)\quad 163x_4 + x_9 = 270$$

Yhtälöiden ratkaisu muodostuu simplex-menetelmää käytettäessä taulukon 1 mukaiseksi.

Taulukossa on osassa 1. pystysarakkeeseen P_0 merkitty tuotantosuunnan valintaa rajoittavat tekijät eli ne tuotantovälinemäärät, jotka voidaan käyttää minkä tahansa viljelykasviyhdistelmän toteuttamiseen. Siten on sarakkeen ensimmäisenä numerona (P_5) pinta-alarajoitusta osoittava luku 9, toisena (P_6) kylvö- ja muokkauskaudella käytettävissä olevaa työtuntimäärää osoittava luku 270 jne. Pystysarak-

Taulukko 1. Tuotantosuunnan ratkaisu simplex-menetelmän avulla hintojen ollessa muuttumattomia.

			Vajausmuuttujat					Kevätvehnä	Ohra	Peruna	Sokerij.	Saraketark.	
								Todelliset muuttujat					
		C ⟶	0	0	0	0	0	48.6	42.7	87.4	171.3		
		P_0	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_1	P_2	P_3	P_4	$\sum$	R
Osa 1.													
Pinta-ala	P_5	9	1					1	1	1	1	14.00	9.00
Työtunteja kylvök.	P_6	270		1				10	7	36	16	340.00	16.88
" harv.kaut.	P_7	360			1					40	115	516.00	3.13
" korj.k.alkup.	P_8	270				1		36	15	167		489.00	---
" " loppup.	P_9	270					1				$\boxed{163}$	434.00	1.66
	Z	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
	Z-C	0	0	0	0	0	0	-48.60	-42.70	-87.40	$\boxed{-171.30}$	-350.00	
Rivitark.	1-$\sum$	-1178.00	0	0	0	0	0	2.60	20.70	-155.60	-122.70		
Osa 2.													
	P_5	7.343	1				-0.006	1	1	1	0	11.337	7.34
	P_6	243.496		1			-0.098	10	7	36	0	297.398	6.76
	P_7	169.509			1		-0.705			40	0	209.801	4.24
	P_8	270.000				1		36	15	$\boxed{167}$	0	489.000	1.62
	⟶ P_4	1.656					0.006	0	0	0	1	2.662	---
	Z	283.741	0	0	0	0	1.050	0	0	0	171.30		
	Z-C	283.741	0	0	0	0	1.050	-48.60	-42.70	$\boxed{-87.40}$	0	106.103	
	1-$\sum$	-974.759	0	0	0	0	0.752	2.60	20.70	-155.60	0		
Osa 3.													
	P_5	5.726	1			-0.006	-0.006	0.784	$\boxed{0.910}$			8.409	6.29
	P_6	185.293		1		-0.215	-0.098	2.239	3.766			191.986	49.20
	P_7	104.838			1	-0.239	-0.705	-8.622	-3.592			92.677	---
	⟶ P_3	1.616				0.005	0	0.215	0.089	1		2.928	18.00
	P_4	1.656				0	0.006	0	0		1	2.662	---
	Z	425.049	0	0	0	0.523	1.050	18.843	7.848	87.40	171.3		
	Z-C	425.049	0	0	0	0.523	1.050	-29.756	$\boxed{-34.851}$	0	0	362.019	
	1-$\sum$	-723.185	0	0	0	0.931	0.752	36.147	34.672	0	0		
Osa 4.													
	⟶ P_2	6.291	1.098			-0.006	-0.006	0.861	1			9.239	
	P_6	161.594	-4.138	1		-0.193	-0.072	-1.006				157.187	
	P_7	127.444	3.947		1	-0.261	-0.729	-5.526				125.872	
	P_3	1.051	-0.098			0.006	0.006	0.138		1		2.098	
	P_4	1.656					0.006				1	2.662	
	Z	644.331	38.291	0	0	0.294	0.816	48.887	42.7	87.4	171.3		
	Z-C	644.331	38.291	0	0	0.294	0.816	0.278	0	0	0	684.022	
	1-$\sum$	-941.344	-38.095	0	0	1.159	0.986	6.266	0	0	0		

keeseen P_1 on ylinnä eli riville C merkitty kevätvehnän nettosadon arvo 48 600 mk/ha[1] sekä muille riveille vaatimukset, jotka pinta-alaan ja työnmenekkiin nähden asetetaan viljeltäessä 1 ha kevätvehnää. Sarakkeessa P_2 on esitetty vastaavat luvut ohran, sarakkeessa P_3 perunan ja sarakkeessa P_4 sokerijuurikkaan kohdalta. Niinpä esimerkiksi yhden hehtaarin kevätvehnän viljely vaatii 36 tuntia P_8:lla merkitystä I korjuukauden työstä.

Taulukon Z-rivin arvot eri sarakkeiden kohdalla ilmaisevat sitä voittoa, joka joudutaan uhraamaan, jos ko. sarakkeen edustama prosessi otetaan tuotantosuunnitelmaan jonkin tuotantosuunnitelmaan jo aikaisemmin otetun prosessin tilalle. Erotus Z-C ilmaisee siten näin menetetyn voiton ja mukaan otetun prosessin sen korvaukseksi antaman voiton erotuksen. Siten on ymmärrettävää, että Z-C-sarakkeessa esiintyvät negatiiviset arvot merkitsevät, että tuotantosuunnitelmaa voidaan vielä parantaa. Suurin parannus saadaan luonnollisesti aikaan ottamalla tuotantosuunnitelmaan mukaan se prosessi, jonka kohdalla erotuksen negatiivinen arvo on itseisarvoltaan suurin.

Taulukon ensimmäisen osan, johon tarvittavat numerotiedot on nyt keskitetty laskutekniikan vaatimalla tavalla, lähtökohta on se, ettei mitään kasveja viljellä. Tästä on seurauksena, että Z-arvot kaikkien prosessien kohdalla = 0; ts. kun ei viljellä mitään, ei ole mitään voittoa menetettävänä. Suurin parannus tuotantosuunnitelmaan voidaan saada aikaan ottamalla suunnitelmaan prosessi P_4 eli sokerijuurikas, jolla sadon nettoarvo hehtaaria kohti on korkein.

Sarakkeiden P_0 ja P_4 perusteella voidaan nyt laskea sarakkeen R arvot, jotka ilmaisevat kuinka paljon sokerijuurikasta voidaan viljellä kaikki eri rajoitukset huomioon ottaen, ts. missä laajuudessa prosessi P_4 voidaan ottaa tuotantosuunnitelmaan. Sarakkeen R arvot saadaan jakamalla ko. rivin luku sarakkeessa P_0 vastaavan rivin luvulla P_4-sarakkeessa. Sarakkeen R arvoista voidaan havaita, että II korjuukaudella käytettävissä oleva työmäärä muodostuu suurimmaksi

---

1) Laskutoimitusten tarkistamista silmälläpitäen nettosadon arvo on mukavampi ilmaista 1 000 mk:ssa.

ja siis ratkaisevaksi rajoitukseksi, koska sokerijuurikasta voidaan viljellä ainoastaan 1.66 ha käytettävissä olevan 270 tunnin puitteissa.

Seuraavana askeleena prosessin edistyessä on aikaansaada toinen osa taulukosta sellaiseksi, että kaikki sen numerot on ilmaistu huomioon ottaen 1.66 ha:n sokerijuurikkaan viljelyn vaatimukset. Siten osassa 2. esimerkiksi sarakkeen P_0 rivin P_5 luku 7.343 osoittaa sen pinta-alan määrän, joka on vielä käytettävissä, kun prosessia P_4 (= sokerijuurikasta) on päätetty ottaa suunnitelmaan 1.656 ha. Vastaavasti sarakkeen P_0 rivin P_6 luku 243.496 osoittaa sen työtuntimäärän, joka muokkaus- ja kylvökaudella vielä jää muihin tarkoituksiin käytettäväksi. Ts. tuotantosuunnitelmaan eli tässä vaiheessa osaan 2. otetaan sokerijuurikkaan viljely (P_4 = sisääntulorivi, incoming row) maksimimääräisenä. Koska tällöin eniten rajoittava tekijä (P_9 = ulosmenorivi, outgoing row) tulee loppuun käytetyksi, jää sitä koskeva rivi pois osasta 2. Laskuteknillisesti saadaan osa 2. seuraavasti: osan 2. sisääntulorivi P_4 saadaan jakamalla osan 1. ulosmenorivi P_9 (jonka kohdalla R:n arvo on pienin) 163:lla, ns. ulosmenotapilla (outgoing pivot). Kunkin sarakkeen uudet alkiot saadaan vähentämällä edellisen osan vastaavista alkioista korjaustermi, joka saadaan kertomalla ulosmenosarakkeen alkiot laskettavan sarakkeen sisääntulorivin alkiolla. Esim. P_0-sarakkeessa:[1)]

$$243.496 = 270 - (1.656)(16),$$

tai P_9-sarakkeessa

$$-\ 0.705 = 0 - (0.00613)(115).$$

Ne sarakkeet, joiden kohdalla sisääntuloalkio on = 0, samoinkuin ne rivit, joiden kohdalla ulosmenosarakkeen alkio = 0, jäävät muuttumatta. Tämän voi todeta yksinkertai-

---

[1)] Ratkaisua suoritettaessa on tärkeätä käyttää riittävästi desimaaleja. Tässä esitetty ratkaisu on laskettu 5:llä desimaalilla. Taulukossa on käytetty tilan säästämiseksi kuitenkin vain 3:a desimaalia, mistä johtuen esimerkkien laskutoimituksissa esiintyy näennäistä epätarkkuutta.

sesti suorittamalla yllä olevan ohjeen mukaisesti laskutoimitukset. Esim. P_6-sarakkeessa

$$1 = 1 -(1.656)(0);$$

Samoin voidaan todeta, että sisääntulosarakkeen P_4 kaikki muut alkiot ovat = 0, paitsi sisääntulotappi, joka on = 1. Näin ollen osaan 2 tarvitsee laskea vain sarakkeiden P_0 ja P_9 rivit P_5, P_6, P_7 ja P_4, muu osa voidaan kopioida suoraan osasta 1.

Toisen osan rivi Z lasketaan kertomalla P_4-rivin arvot sokerijuurikkaan tuottamalla tulolla 171.300. Tämän rivin arvojen ja eri viljelykasvien hehtaarisatojen nettoarvojen erotuksen perusteella voidaan päätellä, mikä näistä seuraavassa vaiheessa on kannattavin korvata. Sarakkeen Z-C luvuista on itseisarvoltaan suurin negatiivinen arvo perunan eli sarakkeen P_3 kohdalla -87.40. Sarake R lasketaan samoin kuin edellä, jolloin huomataan, että korjuukauden I käytettävissä oleva työmäärä asettaa perunan viljelylle ratkaisevan rajoituksen. Tämän jälkeen suoritetaan samoja periaatteita noudattaen taulukon 3:nnen, 4:nnen, jne. osan laskentaa siksi, kunnes sarakkeen Z-C arvot kaikki muodostuvat positiivisiksi, mikä osoittaa, että paras mahdollinen yhdistelmä on saavutettu. Esimerkkitapauksessa päädytään tähän neljännen laskuvaiheen jälkeen, jolloin voidaan todeta, että korkein mahdollinen tulo tässä tapauksessa muodostuu 644 331 mk:ksi silloin, kun käytettävissä oleva 9 ha:n pinta-ala jaetaan käyttämällä perunan viljelyyn 1.05 ha, sokerijuurikkaan viljelyyn 1.66 ha ja ohran viljelyyn 6.29 ha. Samalla jää kylvökautena käytettävissä olevasta työstä käyttämättä 161 tuntia ja harvennuskauden työstä 127 tuntia.

Ratkaisumenetelmässä joudutaan suorittamaan paljon vakiolla kertomista ja jakamista, mihin seikkaan perustuu tarkistusmenetelmä, joka esitetään seuraavassa lyhyesti (vrt. HEADY, CANDLER 1958, s.183-192). $\sum$-sarakkeeseen on laskettu kunkin rivin kertoimien summa, esim.

$$340 = 270 + 1 + 10 + 7 + 36 + 16,$$
$$516 = 360 + 1 + 40 + 115.$$

$1 - \sum$ -rivi on saatu vähentämällä 1:stä kunkin sarakkeen kertoimien summa.

Esim. $-1178.00 = 1 -(9 + 270 + 360 + 270 + 270)$

tai $-122.70 = 1 -(1 + 16 + 115 + 163 - 171.30)$

Sarakesummiin ei ole syytä ottaa mukaan Z-riviä, koska Z-C-rivi voidaan seuraavissa osissa laskea samalla tavalla kuin mikä tahansa muu rivi, joten Z-rivi käy tarpeettomaksi. Rivin $1-\sum$ uusiin alkioihin sovelletaan samaa laskutapaa kuin varsinaisiin panos-tuotos-kertoimiin. Näin ollen saadaan osan 2 P_0-alkio seuraavasti:

$$-974.759 = -1178 - (1.656)(-122.70).$$

Toisaalta sama alkio saadaan samalla tavalla kuin ensimmäisessä osassa:

$$-974.759 = 1 -(7.343+243.496+169.509+270.000+1.656+283.741).$$

Sama tulos molemmissa tapauksissa takaa sen, että laskutoimitukset on suoritettu oikein.

$\sum$-sarakkeeseen sovelletaan samaa menettelyä, jolloin esim. osan 2 P_6-riville saadaan:

$$297.39 = 340.00 -(2.662)(16),$$

sekä yhteenlaskemalla

$$297.398 = 243.496 + 1 - 0.098 + 10 + 7 + 36.$$

Koska molemmat laskutavat antavat saman tuloksen, ei mitään virhettä ole tehty.

Näiden rivi- ja saraketarkistusten avulla tulee kukin kerroin tarkistetuksi kahteen kertaan, ja tämä antaa myös keinon mahdollisen virheen paikallistamiseen. Jos nimittäin esim. alkiossa P_7P_9 olisi virhe muiden kertoimien ollessa oikein, niin huomattaisiin virhe P_7-rivillä ja $\sum$-sarakkeessa ja 1 - $\sum$-rivillä P_9-sarakkeen kohdalla.

Tavallisesti ei kuitenkaan ole tarpeellista laskea kaikkia rivi- ja saraketarkistuksia, vaan menetelmää sovelletaan vain Z-C-riviin ja P_0-sarakkeeseen.

Lopuksi on vielä syytä tarkistaa, että saadut arvot toteuttavat alkuehdot. Taulukkoon 2. on laskettu lopullisen ratkaisun vaatimat työmäärät kunkin kasvin kohdalla.

Taulukko 2. Taulukon 1. lopputarkistus.

		42.7	87.4	171.3	Resurssit	
		Ohra	Peruna	Sok.-juur.	Vaatimus	Käytettävissä
Maa	P_5	6.29	1.05	1.66	9.00	9.00
Kylvö- ja muokk.kausi	P_6	44	38	27	109	270
Harv.- ja harauskausi	P_7		42	191	233	360
Korjuukausi I	P_8	94	176		270	270
Korjuukausi II	P_9			270	270	270
Tuotto		268.7	91.9	283.7	644.3	

Verrattaessa vaadittavia työmääriä käytettävissä oleviin resursseihin huomataan, ettei mitään rajoitusten ylittämistä ole tapahtunut ja että myös P_0-sarakkeen ilmoittama tuotto on oikea.

b) Vaihtuvahintainen ohjelmointi tuotannon suunnittelussa.

Edellisessä esimerkissä on yksityiskohdittain selvitetty simplex-menetelmää. Siitä käy ilmi, että lopputulokseen vaikuttavat oleellisesti käytettävissä olevat tuotantovälineet (resurssit), tuotantomahdollisuudet (panos-tuotos-kertoimet) ja nettotuotot. Jos jokin näistä muuttuu, aiheuttaa se useimmiten koko optimisuunnitelman muuttumisen.

Usein voi kuitenkin olla vaikeaa määrätä tarkasti kaikkia taloussuunnitelmaan sisältyviä rajoituksia, kuten esim. pääomaa tai työnmenekkiä. Erityisesti tämä kuitenkin koskee tuotteiden hintoja ja hintasuhteita, joissa jatkuvasti tapahtuu muutoksia. Ohjelman laatiminen monta eri yksikköhintaa varten erikseen olisi liian suuritöinen, ja yhden hinnan mukaan laadittu suunnitelma voi olla epätyydyttävä. Tällaisia probleemeja varten on käytettävissä ns."muunnettu simplex-menetelmä".

Seuraavassa esimerkissä on menetelmää sovellettu tapaukseen, jolloin yhden kasvin, perunan, yksikköhinta ja siis myös nettotuotto vaihtelee. Menetelmän avulla saadaan selville ne hintarajat, joiden välillä tietty optimisuunnitelma säilyy muuttumattomana. Sitä voidaan näin ollen käyttää tehokkaasti myös tutkittaessa hintojen muutoksen vaikutusta jonkin kasvin säilymiseen viljelysuunnitelmassa. Lineaarisista rajoituksista johtuu nimittäin, että optimisuunnitelma muuttuu hyppäyksittäin. Esim. edellä esitetyssä graafisessa ratkaisussa (s.10) suoran g kulmakertoimen itseisarvo (suoran yhtälö: $x_2 = f - \frac{48}{87} x_1$) saa kasvaa aina arvoon 1 saakka pisteen P pysyessä "optimipisteenä". (Suoran AB kulmakerroin on =-1 ja suoran CD kulmakerroin = $-\frac{2}{5}$). Toisin sanoen perunan suhteellinen ylijäämä (nettotuotto) 48 001 mk antaa vielä saman optimiratkaisun kuin edellä, mutta sen laskettua arvoon 48 000 mk mikä tahansa suoran

PB piste kelpaa optimipisteeksi. Jos perunan nettotuotto laskee alle 48 000 mk:n kulkee suora g pisteen B kautta, jolloin viljelysuunnitelmaan kuuluu 5 ha vehnää, mikä tulos on pääteltävissä välittömästi alkuehdoistakin. Toisaalta suoran g kulmakertoimen itseisarvo saa pienentyä arvoon $\frac{2}{5}$ saakka optimisuunnitelman pysyessä vakiona. Jos se pienenee alle tämän arvon, joka vastaa perunan nettotuottoa 120 000 mk/ha, kulkee suora g pisteen C kautta, jolloin siis kannattaa viljellä yksinomaan perunaa. Optimisuunnitelma säilyy siis vakiona perunan nettotuoton vaihdellessa 48 000 mk:sta 120 000 mk:aan. Vastaavalla tavalla voitaisiin tutkia vehnän nettotuoton vaihtelun vaikutusta viljelysuunnitelmaan.

Esimerkissämme on tutkittu perunan hinnan vaikutusta optimiratkaisuun edellä olleessa kiinteähintaisessa ohjelmointiprobleemissa. Alkuasetelma on siis sama kuin edellä lukuun ottamatta sitä, että perunan sadon nettoarvoksi merkitään aluksi 0. Tehtävä ratkaistaan edellä selostetulla simplex-menetelmällä. Että taulukon 3 3:nnessa osassa saatu tulos on optimitulos näkyy siitä, että kukin $Z_j-C_j \geqq 0$. Viljelysuunnitelmaan tulee tällöin 7.3436 ha kevätvehnää ja 1.6564 ha sokerijuurikasta ja nettotuotto on yhteensä 640 640 mk.

Kun nyt tarkastetaan Z-C-riviä, huomataan, että jos perunan nettotuotto olisikin 48 600 mk/ha, olisi saatu tulos vieläkin optimitulos, sillä silloin saataisiin P_3-sarakkeen Z-C-arvoksi 0. Mutta jos jokin $Z_j-C_j = 0$, eikä ko. muuttuja ole mukana ratkaisussa, ei saatu tulos ole ainoa optimitulos, vaan mainittu muuttuja voidaan sisällyttää viljelysuunnitelmaan kokonaisnettotuoton silti muuttumatta. Lähdettäessä olettamuksesta, että perunan nettotuotto on 48 600 mk, pysyy ratkaisu samana kuin osassa 3, paitsi että $Z_3-C_3 = 0$, minkä takia lopputulosta ei ole merkitty uudelleen. Otetaan P_3 mukaan ratkaisuun. Ulosmenorivi määräytyy tavalliseen tapaan pienimmän P_0/P_3 osamäärän mukaan ja saadaan siksi P_8. Z-C-rivi ei muutu, sillä $Z_3-C_3 = 0$, jolloin esim.

Taulukko 3. Tuotantosuunnan ratkaisu simplex-menetelmän avulla hintojen muuttuessa.

							Kevät-vehnä	Ohra	Peruna	Sokerijuurikas		
	C	0	0	0	0	0	48.600	42.700	0	171.300		
		Vajausmuuttujat					Todelliset muuttujat					
	P_o	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_1	P_2	P_3	P_4	R	
P_5	9	1					1	1	1	1	9	
P_6	270		1				10	7	36	16	16.88	
P_7	360			1					40	115	3.33	1
P_8	270				1		36	15	167		---	
P_9	270					1				$\boxed{163}$	1.66	
Z-C	0	0	0	0	0	0	-48.600	-42.700	0	$\boxed{-171.300}$		
P_5	7.3436	1				-0.0061	$\boxed{1}$	1	1	0	7.34	
P_6	243.4969		1			-0.0982	10	7	36	0	24.35	
P_7	169.5092			1		-0.7055			40	0	---	
P_8	270.0000				1	0	36	15	167	0	7.50	2
→ P_4	1.6564					0.0061				1	---	
Z-C	283.741	0	0	0	0	1.051	$\boxed{-48.600}$	-42.700	0	0		
→ P_1	7.3436	1				-0.0061	1	1	1	0	7.34	
P_6	170.0609	-10	1			-0.0368	0	-3	26	0	65.41	
P_7	169.5092	0		1		-0.7055	0	0	40	0	4.24	
P_8	5.6304	-36			1	0.2209	0	-21	$\boxed{131}$	0	0.04	3
P_4	1.6564	0				0.0061	0	0	0	1	---	
Z-C	640.640	48.600	0	0	0	0.753	0	5.900	$\boxed{48.600}$	0		
P_1	7.3006	1.2748			-0.0076	-0.0078	1	$\boxed{1.1603}$	0	0	6.29	
P_6	168.9434	-2.8552	1		-0.1985	-0.0806	0	1.1678	0	0	144.67	
P_7	167.7900	10.9920		1	-0.3054	-0.7729	0	6.4120	0	0	26.17	4
P_3	0.0430	-0.2748	0	0	0.0076	0.0017	0	-0.1603	1	0	neg	
P_4	1.6564	0			0	0.0061	0	0	0	1	---	
Z-C	640.640	48.600	0	0	0	0.753	0	5.900	48.600	0		
ΔC		176.856						$\boxed{36.806}$				
Z'$\overset{h}{=}$C'	642.222	38.486	0	0	0.281	0.815	0	0	85.406	0		
P_2	6.2919	$\boxed{1.0987}$	0	0	-0.0066	-0.0067	0.8618	1	0	0	5.73	
P_6	161.5957	-4.1383	1								neg	
P_7	127.4463	3.9471		1							---	
P_3	1.0517	-0.0987			0.0066	0.0006	0.1381	0	1	0	neg	5
P_4	1.6564	0									---	
Z-C	642.222	38.486	0	0	0.281	0.815	0	0	85.406	0		
ΔC		$\boxed{390.008}$										
Z'$\overset{h}{=}$C'	1052.354	0	0	0	2.855	0.971	53.860	0	475.414	0		
P_5	5.7266	1			-0.0060	-0.0061	0.7844	0.9102	0	0		
P_6	185.2941	0										
P_7	230.7364	0										6
P_3	1.6169	0			0.0072	0	0.2155	0.0898	0	0		
P_4	1.6564	0										
Z-C	1052.354	0	0	0	2.855	0.971	53.860	0	475.414	0		

uudeksi Z_0-C_0:ksi saadaan 640.640 -(0.0430)(0) = 640.640 tai Z_2-C_2:ksi 5.900 - (-0.1600)(0) = 5.900. Tämän voi todeta myös muodostamalla Z-C-rivin kaavan $Z_j-C_j = \sum C_i r_{ij} - C_j$ mukaan. Esim. Z_0C_0 = (7.3006)(48.600)+(0.0430)(48.600)+ (1.6564)(171.300) - 0 = 640.640. Näin ollen voidaan Z-C-rivi kopioida suoraan osaan 4. Panos-tuotos-kertoimet puolestaan saadaan normaalilla simplex-menetelmällä siten kuin edellisestä esimerkistä ilmenee.

Tällöin kuuluu suunnitelmaan 7.3006 ha kevätvehnää, 0.0430 ha perunaa ja 1.6564 ha sokerijuurikasta kokonaisnettotuoton ollessa edelleen 640 640 mk. Nyt on kuitenkin perunan nettotuotto 48 600 mk, kun se edellisessä tapauksessa, jolloin se ei ollut mukana, oli = 0. Kun tarkastellaan Z:n muodostumista osassa 4 huomataan, että kahdessa sarakkeessa, P_5:ssä ja P_2:ssa, on P_3-rivillä r_{3i} negatiivinen. Niiden kohdalla tapahtuu Z:n ja siis myös Z-C:n pienenemistä sitä enemmän, mitä suurempi on rivin P_3 kerroin C_3. Nyt herääkin kysymys, kuinka suureksi C_3, perunan nettotuotto, voi nousta, jotta Z-C olisi näiden sarakkeiden kohdalla vielä positiivinen tai = 0. Tällöinhän ratkaisu 4 pysyisi vielä optimituloksena, koska jokainen $Z_j-C_j \geqq 0$. Olkoon ΔC_h perunan nettotuoton C_3:n lisäys. Tällöin on oltava voimassa epäyhtälö (48.600)(1.1603)+(48.600 + ΔC_h)(-0.1603)+ (0)(171.300) -42.700 $\geqq$ 0,

josta saadaan

$$\Delta C_h \leqq \frac{5.900}{0.1603} = 36.806$$

ja P_5:n kohdalla

(48.600)(1.2748)+(48.600 + ΔC_h)(-0.2748)+(0)(171.300) $\geqq$ 0,

eli

$$\Delta C_h \leqq \frac{48.600}{0.2748} = 176.856.$$

Tuoton lisäys saa kohota korkeintaan yhtäläisyysmerkin osoittamaan rajaan saakka ilman että optimitulos muuttuu. Yleisesti merkittynä on

$$\Delta C_h \geqq \frac{Z_j-C_j}{-r_{hj}}.$$

Tämän kaavan mukaan muodostetaan ΔC_h-rivi jakamalla "perunarivin" P_3 negatiivisella alkiolla vastaava Z-C-alkio. Pienin saaduista osamääristä (36.806) lisättynä perunan nettotuottoon (48.600) antaa muilta osiltaan saman tuloksen kuin osassa 4, paitsi että Z-C-rivi muuttuu, koska P_3-rivin kerroin on 85.406. Uudet arvot on merkitty riville Z'-C'. Ne saadaan mukavimmin seuraavan kaavaan mukaan:

$$Z_j'-C_j' = (Z_j-C_j) + (\Delta C_h)(r_{hj}),$$

jossa $(\Delta C_h)(r_{hj})$ on perunan nettotuoton hinnassa tapahtuneen nousun aiheuttama lisäys Z:n arvoon.

$$\begin{aligned}\text{Esim. } 642.222 &= (48.600)(7.3006) + (48.600 + 36.806)(0.0430) \\ &+ (171.300)(1.6564) \\ &= 640.640 + (36.806)(0.0430), \text{ jossa}\end{aligned}$$

(36.806)(0.0430) edustaa juuri lisäystä $(\Delta C_h)(r_{hj})$,

Osa 4 sisältää siis kaksi ratkaisua, joissa kummassakin panos-tuotos-kertoimet ovat samat, mutta Z-C-rivit poikkeavat toisistaan siten, että perunan nettosatoa 48 600 mk vastaa rivi Z-C ja nettosatoa 85 406 mk rivi Z'-C'.

Jälkimmäisessä ratkaisussa saadaan P_2-sarakkeen Z'-C' arvoksi = 0. Mutta se merkitsee jälleen sitä, että saatu ratkaisu ei ole ainoa optimitulos. Nyt voidaan ottaa mukaan P_2. Tällöin tulee ulosmenoriviksi P_1, joten kevätvehnä vaihtuu ohraksi. Osan 5 Z-C-riviksi saadaan kopioida suoraan osan 4 Z'-C'-rivi. Saadussa ratkaisussa on vielä 1 negatiivinen arvo P_3-rivillä, nimittäin -0.0987. Jälleen voidaan siis P_3:n hintaa ja sitä tietä tuottoa nostaa määrällä, joka saadaan kaavasta

$$\Delta C_h \geqq \frac{Z_j-C_j}{-r_{hj}},$$

eli siis 390 008 mk:lla. Edellä selostetulla tavalla lasketaan Z'-C', josta nähdään, että ratkaisussa on P_3:n "raja-arvona" 475 414 mk. P_5 on nyt ulosmenosarake. Osaan 6 ei ole laskettu muuta kuin sisäänmenorivi ja P_3-rivi, jonka positiiviset kertoimet osoittavat, ettei optimitulos muutu, olkoon P_3:n hinta kuinka suuri tahansa. Tällöin on viljelysuunnitelmassa mukana 1.6169 ha perunaa ja 1.6564 ha sokerijuurikasta lopun maan jäädessä käyttämättä työvoimarajoitusten takia. Taulukossa 4 on esitetty yhteenveto tuloksista.

Taulukko 4. Perunan hinnan ja nettotuoton vaihtelun vaikutus viljelysuunnitelmaan.

	Perunan nettotuotto mk/ha		Kevätvehnä	Ohra	Peruna	Sokerijuur.	Yht.
	min.	max.	ha	ha	ha	ha	ha
1.	0	48600	7.3436			1.6564	9
2.	48600	85406	7.3006		0.0430	1.6564	9
3.	85406	475414		6.2919	1.0517	1.6564	9
4.	475414				1.6169	1.6564	3.2733

Lyhyt yhteenveto edellisestä.

1. Ratkaistaan probleemi aluksi käyttäen perunan nettotuoton alhaisinta kysymykseen tulevaa arvoa, tavallisimmin arvoa = 0.

2. Jos perunaa ei ole mukana ratkaisussa, otetaan se mukaan nostamalla sen tuottoa arvolla, jonka osoittaa sen Z-C alkio. (Kaikki muut paitsi perunan Z-C arvot säilyvät ennallaan).

3. Muodostetaan ΔC_h. Jaetaan Z_j-C_j r_{hj}:llä, jossa r_{hj}, "perunarivin" panos-kerroin, on negatiivinen ja Z_j-C_j positiivinen. Merkitään saadut osamäärät itseisarvoina ΔC_h-riville.

4. Pienin ΔC_h määrää mukaan otettavan uuden muuttujan. Uudet panos-tuotos-kertoimet saadaan normaalilla tavalla, mutta uudet Z'-C'-rivin arvot saadaan lisäämällä edelliseen Z-C-riviin pienin ΔC_h arvo kerrottuna edellisen osan "perunarivillä".

5. Toistetaan kohdat 3 ja 4 kunnes perunan hinta saavuttaa suurimman kysymykseen tulevan arvon, tai kunnes kaikki "perunarivin" panos-kertoimet ovat positiivisia.

3. Rehuseoksessa käytettävien rehujen valinta.

Lineaarisen ohjelmoinnin sovellutuksissa muodostavat tärkeän tehtäväryhmän ns. seosprobleemit, joissa pyritään löytämään kustannuksiltaan halvin raaka-aineiden yhdistelmä tietyt vaatimukset täyttävälle valmistettavalle seokselle. Maatalouden piirissä ehkäpä toistaiseksi laajimman käytännön saavuttanut sovellutusala on kotieläimille syötettävien rehuseosten kokoonpanon määrittäminen. Perustavaa laatua olevan rehuseosprobleemien ratkaisun esitti WAUGH (1951). Hän etsi halvinta lypsykarjalle tarkoitettua rehuseosta, joka täyttäisi tietyt minimivaatimukset energian, valkuaisen, kalsiumin ja fosforin suhteen, kun käytettävissä on kymmenen erilaista perusrehuainetta. Hänen esittämäänsä menettelytapaa ovat kehittäneet edelleen mm. FISHER ja SCHRUBEN (1953), jotka käsittelevät rehuaineiden hintojen vaihtelun huomioon ottamista ratkaisuissa, ja teknillisessä mielessä SWANSON (1955), joka selvittelee elektronikoneiden käyttömahdollisuuksia. HUTTON ja ALLISON (1957) korostavat rehusekoittamoiden toiminnassa esiintulevien käytännöllisten näkökohtien, kuten sekoitus- ja säkityskoneiston toiminnan, eri rehuaineiden volyymivaikutuksen, varastojen suuruuden sekä erilaisten myyntiteknillisten seikkojen huomioon ottamista. He esittävät ratkaisun rehuseokselle, jolle on asetettu 24 vaatimusta.

Perusedellytyksenä onnistuneelle, käytäntöön todella sovellettavissa olevalle rehuseos-ratkaisulle matemaattisin menetelmin on, että seokselle asetettavat vaatimukset voidaan etukäteen kvantitatiivisesti määritellä. Siten probleemin ratkaisun ensimmäisessä vaiheessa on käännyttävä ruokinta-asiantuntijoiden puoleen. Kysymyksessä ei tällöin ole ainoastaan tavanomaisesti energia ja valkuaistarve, vaan myöskin rasvasisältö, raakakuidun määrä, rehuihin sisältyvät hivenaineet sekä kokoonpanon monipuolisuus, sulavuus ym. näkökohdat. Toiseksi on yhteistoiminnassa ao. liikkeiden kanssa selvitettävä ja määritettävä valmistukseen liittyvät teknilliset ja kaupalliset erikoisvaatimukset tuotteen ulkonäköön, tilavuuspainoon ym. seikkoihin huomiota kiinnittäen.

Kun seuraavassa on pyritty esimerkin valossa selvittämään rehuseosprobleemin ratkaisua ns. simplex-menetelmää käyttäen, on laskutoimitusten esityksen lyhentämiseksi tyydytty vain seuraaviin seokselle asetettaviin vaatimuksiin. Seoksen ry-arvo pitää olla vähintään 1.11, sulavaa raakavalkuaista tulee olla vähintään 38 %, raakarasvapitoisuuden on oltava vähintään 5 % ja korkeintaan 6 % ja raakakuitupitoisuus korkeintaan 9 %. Lisäksi on auringonkukkarouheen osuus lopullisessa seoksessa rajoitettu korkeintaan 10 %:iin. Seossuhde lasketaan osoittamaan yhden rehuseoskilon sisältöä.

Käytettävissä olevat perusrehut, niiden kokoomus ja hinnat ilmenevät taulukosta 5.

Taulukko 5. Rehuseoksen perusrehut.

	Symboli	Hinta mk/kg	Ry-arvo	Sul. raaka-valk.%	Raaka-rasvaa %	Raaka-kuitua %
Auringonkukka-rouheet	x_1	34:35	1.18	45.0	5.8	8.2
Maapähkinä-liuskeet	x_2	38:85	1.25	41.0	4.5	4.5
Pellavaliuskeet	x_3	35:35	1.09	31.0	6.8	10.2
Soijarouheet	x_4	38:40	1.18	42.0	1.1	5.1
Leseet	x_5	28:00	0.78	12.7	3.7	9.2
Maissi	x_6	33:40	1.08	7.7	4.0	2.8

Asetettujen vaatimusten perusteella voidaan muodostaa matemaattinen malli, joka muodostuu seuraavasti.

Rehuyksikköehto:

(1) $1.18x_1+1.25x_2+1.09x_3+1.18x_4+0.78x_5+1.08x_6 \geq 1.11$

Sul.raakavalkuaisehto:

(2) $45.0x_1+41.0x_2+31.0x_3+42.0x_4+12.7x_5+7.7x_6 \geq 38.0$

Rasvaehto:

(3a) $5.8x_1+4.5x_2+6.8x_3+1.1x_4+3.7x_5+4.0x_6 \geq 5.0$

(3b) $5.8x_1+4.5x_2+6.8x_3+1.1x_4+3.7x_5+4.0x_6 \leq 6.0$

Raakakuituehto:

(4) $8.2x_1+4.5x_2+10.2x_3+5.1x_4+9.2x_5+2.8x_6 \leq 9.0$

Määräehto:

(5) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 1$

Minimoitava kustannusyhtälö:

(6) $34.35x_1+38.85x_2+35.35x_3+38.40x_4+28.00x_5+33.40x_6=(\text{Min})$

Kun auringonkukkarouhetta saa käyttää korkeintaan 10 %, sijoitetaan yllä oleviin yhtälöihin $x_1 = 0.1$. Näin saadaan ratkaisua hiukan lyhennetyksi x_1:n eliminoituessa pois ratkaisusta. On nimittäin helppo jo silmämääräisesti päätellä, että auringonkukkarouhetta tulee seokseen täydet 10 %, koska se täyttää kaikki annetut vaatimukset ja on halvempaa kuin soijarouhe ja pellava- ja maapähkinäliuskeet, jotka lähinnä tulevat kysymykseen lopullisessa ratkaisussa.

Käytettäessä tehtävän ratkaisussa edellisessä luvussa jo esitettyä simplex-menetelmää on epäyhtälöt 1-4 muodostettava yhtälöiksi vajausmuuttujia käyttäen. Epäyhtälöiden (3b) ja (4) kohdalla, joissa rehuseoksen sisällölle on asetettu maksimirajoitus, menettely on periaatteessa sama kuin minimirajoituksen sisältävien epäyhtälöiden kohdalla. Nämä vajausmuuttujat ilmaisevat, kuinka monta prosenttia rasva- ja kuitupitoisuus jää alle asetetun ylärajan, joten niiden muuttujien kertoimet ovat positiivisia. Kun muihin epäyhtälöihin liitettävät vajausmuuttujat ilmaisevat minimivaatimuksen ylityksen suuruutta, on yhtälöiksi muunnettaessa vajausmuuttujien kertoimille annettava negatiivinen etumerkki. Yhtälöt, joissa on otettu huomioon seokseen tulevan auringonkukkarouheen vaikutus ja jotka seuraavaa ratkaisua silmälläpitäen on järjestetty uudelleen asettamalla positiivisen vajausmuuttujan omaavat ensiksi, muodostuvat seuraaviksi:

(3b') $4.5x_2+6.8x_3+1.1x_4+3.7x_5+4.0x_6+1x_7 = 5.42$

(4') $4.5x_2+10.2x_3+5.1x_4+9.2x_5+2.8x_6+1x_8 = 8.18$

(1') $1.25x_2+1.09x_3+1.18x_4+0.78x_5+1.08x_6-1x_9 = 0.992$

(2') $41.0x_2+31.0x_3+42.0x_4+12.7x_5+7.7x_6-1x_{10} = 33.50$

(3a') $4.5x_2+6.8x_3+1.1x_4+3.7x_5+4.0x_6-1x_{11}= 4.42$

(5') $x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0.90$

Näiden yhtälöiden pohjalta ei vielä välittömästi päästä suorittamaan ratkaisua simplex-menetelmän avulla, kuten edellisessä esimerkissä. Tämä johtuu negatiivisista vajausmuuttujista, jotka estävät ensimmäisen sisääntulosuunnitelman laatimisen yhtä yksinkertaiseksi kuin edellä. Tehtävän ratkaisemiseksi käytetään ns. m-tekniikkaa. Yhtälöihin (1'),(2'),(3a') ja(5') liitetään apumuuttujat (artificial activities) q_1 - q_4. Voidaan ajatella, että q_1 edustaa erästä rehumäärää, josta koko ry-määrä saadaan, q_2 sellaista määrää perusprehua, josta koko valkuaisaine määrä saadaan, jne. Näiden avulla löydetään ensimmäinen ratkaisu, jota simplex-menetelmällä edelleen kehitetään. On kuitenkin huomattava, että nämä q_v:t eivät saa tulla mukaan loppuratkaisuun. Sitä varten ajatellaan niille hyvin korkea hinta m, joka tekee aina seoksen kannattamattoman kalliiksi, jos jokin q_v esiintyy ratkaisussa. Apumuuttujien lisäämisen jälkeen saavat yhtälöt seuraavan muodon:

(3b'') $4.5x_2+6.8x_3+1.1x_4+3.7x_5+4.0x_6+1x_7 = 5.42$

(4'') $4.5x_2+10.2x_3+5.1x_4+9.2x_5+2.8x_6+1x_8=8.18$

(1'') $1.25x_2+1.09x_3+1.18x_4+0.78x_5+1.08x_6-1x_9+1q_1=0.992$

(2'') $41.0x_2+31.0x_3+42.0x_4+12.7x_5+7.7x_6-1x_{10}+1q_2=33.50$

(3a'') $4.5x_2+6.8x_3+1.1x_4+3.7x_5+4.0x_6-1x_{11}+1q_3=4.42$

(5'') $x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + 1q_4 = 0.90$

Minimoitava kustannusyhtälö on:

$$\sum_{v=1}^{6} c_v x_v + \sum_{v=1}^{4} mq_v = (\min)$$

Apumuuttujat lisätään siis jokaiseen yhtälöön, joka sisältää negatiivisen vajausmuuttujan tai ei mitään vajausmuuttujaa, kuten yhtälö (5''). Tälle yhtälöryhmälle löydetään ensimmäinen ratkaisu, jos $x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$, $x_7 = 5{,}42$, $x_8 = 8.18$, $q_1 = 0.992$, $q_2 = 33.50$, $q_3 = 4.42$ ja $q_4 = 0.90$. Simplex-tekniikan mukaisesti ratkaisua varten sijoitetaan yhtälöryhmän kertoimet, kuten edellisissäkin tapauksissa, matriisin muotoon taulukkoon 6.

Matriisin yläreunaan riville C on merkitty perusrehujen hinnat sekä apumuuttujien kohdalle m ja äärimmäiseksi vasemmalle P_7 ja P_8 -rivien kohdalle 0 ja P_9-P_{12} -rivien kohdalle m. Edellisissä maksimointitehtävissä on ensimmäisen osan Z-rivi saatu siten, että on ajateltu, ettei aluksi ole mitään prosessia ts. yhtälöryhmän ratkaisussa kukin todellinen muuttuja $x_i = 0$ ja kukin vajausmuuttuja x_v = vastaava rajoitus. Kun vajausmuuttujilla ei ole mitään vaikutusta kustannuksiin, käsittää Z-rivi vain nollia. Nyt kantaohjelma käsittää todellisten muuttujien lisäksi sekä vajausmuuttujia (x_7, x_8) että apumuuttujia (q_1 - q_4), ja koska apumuuttujat on saatava pois ratkaisusta, niiden poistamiseen on pantava suurin paino ratkaisun alkuvaiheessa. Sitä varten muodostetaankin kaksi Z-ja Z-C-riviä. Tämä jako on tehty sen tähden, että olisi helpompi erottaa todelliset kustannukset ja apu-

Taulukko 6. Rehuseoksessa käytettävien rehujen valinta simplex-menetelmää käyttäen.

C_s ↓									Maa-pähk.	Pella-val.	Soija	Leseet	Maissi						
			C →	0	0	0	0	0	38.85	35.35	38.40	28.00	33.40	m	m	m	m		
			P_o	P_7	P_8	P_9	P_{10}	P_{11}	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	$\sum$	R
0	Rasva	P_7	5.420	1					4.50	6.80	1.10	3.70	4.00					26.52	1.20
0	Raakakuitu	P_8	8.180		1				4.50	10.20	5.10	9.20	2.80					40.98	1.82
m	Ry	Q_1	0.992			-1			$\boxed{1.25}$	1.09	1.18	0.78	1.08	1				6.372	0.79
m	Raakavalk.	Q_2	33.500				-1		41.00	31.00	42.00	12.70	7.70		1			167.90	0.82
m	Rasva	Q_3	4.420					-1	4.50	6.80	1.10	3.70	4.00			1		24.52	0.98
m	Määrä	Q_4	0.900						1.0	1.0	1.0	1.0	1.0				1	6.90	0.90
	Z_x		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
	Z_m		39.812	0	0	-1	-1	-1	47.75	39.89	45.28	18.18	13.78	1	1	1	1		
	$Z-C_x$		0	0	0	0	0	0	-38.85	-35.35	-38.40	-28.00	-33.40	0	0	0	0	-174.00	
	$Z-C_m$		39.812			-1	-1	-1	$\boxed{47.75}$	39.89	45.28	18.18	13.78	0	0	0	0	201.692	
	$1-\sum$		-92.224	0	0	3.00	3.00	3.00	-64.65	-60.43	-57.36	-20.26	0.04	0	0	0	0		
		P_7	1.848	1		3.600			0	2.876	-3.148	0.892	0.112	-3.600				3.580	0.51
		P_8	4.608		1	3.600			0	6.276	0.852	6.392	-1.088	-3.600				18.040	1.28
		→ P_2	0.793			-0.800			1	0.872	0.944	0.624	0.864	0.800				5.097	---
		Q_2	0.962			$\boxed{32.800}$	-1		0	-4.752	3.296	-12.884	-27.724	-32.800	1			-41.101	0.03
		Q_3	0.848			3.600		-1	0	2.876	-3.148	0.892	0.112	-3.600		1		1.580	0.24
		Q_4	0.106			0.800			0	0.128	0.056	0.376	0.136	-0.800			1	1.802	0.13
	$Z-C_x$		30.831	0	0	-31.080	0	0	0	-1.472	-1.725	-3.757	0.166	31.080	0	0	0	24.041	
	$Z-C_m$		1.917	0	0	$\boxed{37.200}$	-1	-1	0	-1.748	0.204	-11.616	-27.476	-38.200	0	0	0	-41.718	
	$1-\sum$		-40.917			-48.72	3.00	3.00	0	-4.055	3.669	20.081	55.897	48.720	0	0	0		
		P_7	1.743	1		0	0.109			3.397	-3.509	2.306	3.154	0	-0.109			8.091	0.51
		P_8	4.503		1	0	0.109			6.797	0.490	7.806	1.954	0	-0.109			22.551	0.66
		P_2	0.817			0	-0.024		1	0.756	1.024	0.309	0.187	0	0.024			4.095	1.08
		→ P_9	0.029			1	-0.030			-0.144	0.100	-0.392	-0.845	-1	0.030			-1.253	---
		Q_3	0.743			0	0.109	-1		$\boxed{3.397}$	-3.509	2.306	3.154	0	-0.109	1		6.091	0.22
		Q_4	0.082			0	-0.024			0.243	-0.024	0.690	0.812	0	-0.024		1	2.804	0.34
	$Z-C_x$		31.743	0	0	0	-0.947	0	0	-5.975	1.397	-15.965	-26.103	0	0.947	0	0	-14.904	
	$Z-C_m$		0.826	0	0	0	0.134	-1	0	$\boxed{3.641}$	-3.534	2.996	3.966	-1	-1.134	0	0	4.896	
	$1-\sum$		-39.488	0	0	0	1.514	3.00	0	-11.113	8.565	0.944	14.717	0	1.485	0	0		

	P_0	P_7	P_8	P_9	P_{10}	P_{11}	P_2	P_3	P_4
P_7	1.0	1			0	1.000	0	0	0
P_8	3.016		1		-0.109	2.000	0	0	7.512
P_2	0.651				-0.048	0.222	1	0	1.805
P_9	0.061			1	-0.025	-0.042	0	0	-0.049
$\longrightarrow P_3$	0.218				0.032	-0.294	0	1	-1.033
Q_4	0.029				0.016	0.071	0	0	$\boxed{0.227}$
$Z-C_x$	33.050	0	0	0	-0.754	-1.758	0	0	-4.775
$Z-C_m$	0.029	0	0	0	0.016	0.071	0	0	$\boxed{0.227}$
$1-\Sigma$	-37.057				1.873	-0.271			-2.915
P_7	1.0	1			0	1.000	0	0	0
P_8	2.036		1		-0.654	-0.369	0	0	0
P_2	0.417				-0.179	-0.347	1	0	0
P_9	0.067			1	-0.022	-0.027	0	0	0
P_3	0.353				0.107	0.031	0	1	0
$\longrightarrow P_4$	0.129				0.072	0.315	0	0	1
$Z-C_x$	33.671	0	0	0	-0.408	-0.252	0	0	0
$Z-C_m$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$1-\Sigma$	-36.678				2.085	0.648			0

P_5	P_6	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	$\sum$	R
0	0		0	-1.000		2.000	---
3.192	-4.357		0.109	-2.000		10.363	0.40
-0.203	-0.514		0.048	-0.222		2.739	0.36
-0.294	-0.710	-1	0.025	0.042		-0.993	---
0.678	0.928		-0.032	0.294		1.793	---
0.524	0.585		-0.016	-0.071	1	2.367	0.13
-11.909	-20.554	0	0.754	1.758	0	-4.190	
0.524	0.585	-1.0	-1.016	-1.071	0	-1.632	
8.487	25.037	0	1.126	3.271	0		
0	0		0	-1.000		2.000	
-14.129	-23.692		0.654	0.369	-33.012	-67.794	
-4.366	-5.161		0.179	0.347	-7.933	-16.046	
-0.181	-0.584	-1	0.022	0.027	0.216	-0.481	
3.060	3.587		-0.107	-0.031	4.539	12.540	
2.305	2.573		-0.072	-0.315	4.394	10.404	
-0.899	-8.263	0	0.408	0.252	20.985	45.493	
0	0	-1	-1.0	-1.0	-1.0	-4.000	
15.209	32.540	0	0.914	2.351	12.810		

Ratkaisun mukaisen rehuseoksen hinta ja kokoomus.

	%-osuus seoksessa	Hinta	Ry	Valk.	Rasva	Kuitu
Maapähkinä	41.7	16.20	0.52	17.10	1.88	1.88
Pellavaliuske	35.3	12.48	0.38	10.94	2.40	3.60
Soijarouhe	13.0	4.99	0.15	5.46	0.14	0.66
Auringonk.	10.0	3.44	0.19	4.50	0.58	0.82
	100.0	37.11	1.24	38.00	5.00	6.96

muuttujien aiheuttamat m-kustannukset toisistaan. Z_x- ja Z_m-rivit saadaan kuten tavallisesti laskemalla yhteen panoskertoimien ja vastaavien hintojen tulot. Koska markkamääräisiä hintoja ei ole äärimmäisenä vasemmalla olevassa sarakkeessa, on Z_x-rivi pelkkiä nollia. Z_m-riville sen sijaan saadaan nollasta poikkeavia lukuja, koska vasemmalla olevassa sarakkeessa esiintyy m-hintoja. Esim. P_o-sarakkeen Z_m-alkio saadaan seuraavasti:

39.812 m = 0.992 m + 33.500 m + 4.420 m + 0.900 m.

Vastaavasti P_2-sarakkeen Z_m-alkio:

47.75 m = 1.25 m + 41.00 m + 4.50 m + 1.00 m.

Laskuteknillisesti Z_m-rivin alkiot saadaan laskemalla rivien Q_1-Q_4 (m-rivien) sarakesummat. Ratkaisussa voi m:n jättää pois lukujen perästä kuten on tehty esimerkissäkin. Saaduista Z-ja Z_m-rivien alkioista vähentämällä vastaavat C-rivin alkiot saadaan Z-C ja Z-C_m-rivit. Huomattakoon kuitenkin, että C_x-rivi käsittää Q_1-Q_4:n kohdalla nollia, joten niiden kohdalla ovat Z-C_x-rivin alkiot myös nollia, kun taas C_m-rivillä on jokaisen P_v:n kohdalla nolla, mutta Q_1-Q_4:n kohdalla m. Siten esim. Z-C_m-rivin alkioiksi saadaan apumuuttujan kohdalla 1m-1m = 0.

Ratkaisu etenee tämän jälkeen simplex-menetelmän mukaan. Ulosmenosarakkeen määrää suurin Z-C_m-alkio, esimerkissä P_2:n 47.75. Osamäärät P_o/P_2 on merkitty sarakkeeseen R. Pienin positiivinen niistä 0.79 osoittaa ulosmenoriviksi Q_1-rivin, jonka kohdalle tulee osassa 2 sisäänmenorivi P_2, ulosmenosarakkeen mukaan. P_2-rivi saadaan jakamalla kukin ulosmenorivin Q_3 alkio ulosmenotapilla (Q_3P_2) 1.25. Siten esim. P_2P_0 alkioksi saadaan 0.992:1.25 = 0.793, jne. Ne sarakkeet, joiden kohdalla P_2:n alkiot ovat = 0, säilyvät entisinä. Muuttuvat alkiot saadaan mukavimmin seuraavasti: edellisen osan ko. alkiosta vähennetään ko. alkion kanssa samalle riville kuuluvan ulosmenosarakkeen alkion ja uuden sisääntuloalkion tulo. Esim:

P_7P_9: $3.600 = 0 - (-0.800)(4.50)$,

Q_2P_3: $-4.752 = 31.00 - (0.872)(41.00)$.

Sama menettely pätee myös $Z-C_x$ ja $Z-C_m$-riveille. C_x-ja Z_m-rivejä ei tarvitse näin ollen laskea ollenkaan. Esim:

$Z-C_{4m}$: $0.204 = 45.28 - (0.944)(47.75)$,

$Z-C_{6x}$: $0.166 = -33.40 - (0.864)(-38.85)$.

$C-Z_m$-rivi saataisiin myös kuten ensimmäisessä osassa laskemalla Q_1-, Q_2-ja Q_4-rivien sarakesummat (Q_3-riviä ei enää ole). Edellä laskettu $C-Z_{4m}$-alkio saataisiin seur:

$0.204 = 3.296 + (-3.148) + 0.056$

Toisessa osassa on suurin $Z-C_m$-alkio P_9:n 37.200, joten P_9 on sisääntulorivi kolmannessa osassa, ja Q_2-rivi on ulosmenorivi, koska sen kohdalla on R:n ($=P_o/P_9$) arvo pienin. On muistettava, että ulosmenorivin määrää pienin positiivinen osamäärä, 0 mukaan luettuna.

Ratkaisua jatketaan ensiksi siihen saakka, että $Z-C_m$-arvot ovat = 0. Tällöin on päästy erääseen ratkaisuun, johon ei enää kuulu apumuuttujia. Jos tässä vaiheessa on positiivisia $Z-C_x$-arvoja, joita vastaavat $Z-C_m$ arvot = 0, voidaan näiden kohdalta vielä ratkaisua parantaa normaalilla simplex-menetelmällä. Nolla $Z-C_m$ kohdalla säilyttää nimittäin m-kustannuksen edelleen nollana, kuten helposti voi todeta.

Erikseen on syytä huomauttaa, että kolmannessa ja neljännessä osassa on poikettu edellisissä osissa noudatetusta tavasta valita suurin positiivinen $Z-C_m$ alkio määräämään ulosmenosaraketta. Teoreettisesti ottaen on tosin samantekevää, mikä positiivinen alkio ensin valitaan, mutta ratkaisun teknillistä suoritusta voidaan käytetyllä menettelyllä lyhentää. Tavanomaista valintatapaa käyttäen olisi osassa 3 saatu ulosmenosarakkeeksi P_6. Ratkaisun lyhentämiseen pyrittäessä voidaan kuitenkin pitää yleisenä ohjeena, että seokseen on otettava kulloinkin sellainen perusrehu, joka vähiten nostaa todellista hintaa ja eniten laskee m-kustannusta (vrt. HEADY, CANDLER s. 178). Nämä molemmat seikat huomioon ottaen on ulosmenosarakkeeksi valittu P_3, joka jääkin myös lopulliseen ratkaisuun, kun sitävastoin P_6 ei siinä esiinny. Tätä menettelyä käyttäen voidaankin lopullinen ratkaisu löytää jo viidennessä osassa.

Ratkaisun viimeisestä osasta voidaan lukea, että edullisimpaan seokseen kuuluu 35.3 % pellavaliusketta, 41.7 % maapähkinäliusketta, 13.0 % soijarouhetta. Kun seokseen tulee vielä lisää siihen alunperin varattu 10 % auringonkukkarouhetta, saadaan koko rehuseoksen keskihinnaksi 37:11 mk/kg. P_o-sarakkeesta voidaan todeta, että rasvapitoisuus jää 1 % asetetun maksimin alapuolelle, (P_7P_o = 1.0) ts. juuri minimiin, raakakuitupitoisuus 2.04 % alle maksimin. Ry-arvo ylittää 0.067 ry:llä minimirajan, joten alkuperäinen minimiraja ry-arvon kohdalla voisi olla 1.18 sen vaikuttamatta kuitenkaan mitään muihin rajoituksiin tai hintaan. Tämä nähdään myös sarakkeesta Q_1, jonka kohdalla $Z-C_x$-arvo = 0. Sen sijaan 0.408 Q_2:n kohdalla merkitsee sitä, että jos raakavalkuaispitoisuuden alarajaa nostetaan 1 %:lla, nousee kustannus 0.41 mk/kg. Samoin nähdään Q_3:n kohdalta, että 1 % nousu rasvapitoisuuden alarajan kohdalla aiheuttaa 0.252 mk:n nousun rehuseoksen hinnassa ja Q_4:n kohdalta, että koko rehuseoksen määrävaatimuksen aleneminen 1 %:lla pudottaisi hintaa 0.21 mk. Huomattakoon kuitenkin, että jos esimerkissä vaadittu valkuaispitoisuus olisi esim. 40 %, ei käytettävissä olevien perusrehujen avulla voitaisi löytää mitään sellaista ratkaisua, joka täyttäisi kaikki annetut ehdot, vaan joko valkuais- tai rasvapitoisuus jäisi alle annettujen minimivaatimusten. Ratkaisusta näkyisi tämä siitä, että $Z-C_{om}$ olisi vielä positiivinen, vaikka muut $Z-C_{jm}$ -arvot olisivat $\leqq 0$.

Arvosteltaessa saatua tulosta on pidettävä mielessä ratkaisun esimerkkiluonne. Asetettujen vaatimusten pätevyyttä ruokinnalliselta kannalta ei ole tarkistettu. Voidaan esimerkiksi kysyä, onko saatu rehuseos kyllin monipuolinen. Tällöin tulee kysymykseen mm. erilaisten valkuaisaineiden tarpeellisuus ruokinnassa. Tässä suhteessa lienee asiantuntijoiden vastaus erilainen esim. lehmien ja kanojen kohdalla. Laskuteknillisesti ei kuitenkaan ole mitään vaikeuksia tarkemmin määritellyn valkuaisainetarpeen huomioon ottamisessa, kunhan vain rehuista on käytettävissä ao. eritellyt analyysitulokset. Vaikeammin hallittava kysymys on sen sijaan rehujen sulavuudessa mahdollisesti tapahtuva vaihtelu, kun seos esiintyy erilaisissa yhdistelmissä. Periaatteessa voidaan ratkaisu kuitenkin yleensä suorittaa yllä esitetyllä tavalla, riippumatta siitä, millaisia kvantitatiivisesti määritettävissä olevia vaatimuksia seokselle asetetaan.

4. Kuljetusprobleemien ratkaisuista.

Kuljetusprobleemin perusasetelma on varsin yksinkertainen. Tunnetaan tietyn hyödykkeen tarve määrätyissä kulutuskeskuksissa ja toisaalta saman hyödykkeen tuotannon määrä eri tuotantopisteissä. Tehtävänä on ratkaista, mistä ja miten paljon on tuotantopisteistä kuljetettava hyödykettä kuhunkin kulutuskeskukseen, jotta kustannukset jäisivät minimiin. Ratkaisu voidaan suorittaa tavanomaista simplexmenetelmää käyttäen, mutta alkuperäiset[1] tätä tehtävää silmälläpitäen kehitetyt laskutavat ovat teknillisesti huomattavasti helpompia.

Kuljetusprobleemien ratkaisumenetelmien ja maataloustavarakaupan piirissä kysymykseen tulevien käyttömuotojen selvittämiseksi on seuraavassa laadittu riittävän täydellisten tilastojen puuttuessa fiktiivinen esimerkki perunan kuljetuksesta osuustoiminnallisen järjestön piirissä. Esimerkin osuuskaupat kulutuskeskuksissa eivät omalta hankinta-alueeltaan kykene tyydyttämään menekkiä, vaan joutuvat keskusliikkeen kautta täydentämään varastojaan järjestöön kuuluvilta ylituotantoalueiden osuuskaupoilta. Keskusliikkeen maataloustuoteosaston tehtävänä on tällöin osoittaa, mistä ylituotantoalueen osuuskaupasta kunkin alituotantoalueen kaupan tarve on kuljetuskustannusten kannalta edullisimmin tyydytettävissä.

---

[1] Perustavaa laatua olevana tutkimuksena on mainittava F.L. HITCHCOCK'in "The Distribution of a Product from Several Sources to Numerous Localities", Journal of Mathematics and Physics, 20:224-230 (1941), joka esitettiin jo useita vuosia ennen kuin lineaarisen suunnittelun käsite oli muotoutunut.

Esimerkissä on otettu tarkasteltavaksi 13 osuuskauppaa, joista 8 sijaitsee ylituotantoalueella ja 5 alituotantoalueella. Aluksi edellytetään, että alue kokonaisuutena katsoen on kulutusperunan suhteen juuri omavarainen, myöhemmässä vaiheessa tarkastellaan tilannetta, jossa perunan kokonaismenekki on pienempi kuin liikkeen piirissä suoritettujen hankintojen yhteismäärä. Tuotanto- ja kulutusluvut eri alueilla on esitetty taulukossa 7.

Taulukko 7. Perunan tuotanto ja kulutus eri osuuskauppojen alueilla.

Alue	1	2	3	4	5	6	7
Tuotanto	3.81	8.08	5.23	6.45	3.72	2.30	2.88
Kulutus	2.15	1.30	2.43	1.43	0.85	1.30	1.62
Ylijäämä	1.66	6.78	2.80	5.02	2.87	1.00	1.26
Alijäämä							

Alue	8	9	10	11	12	13
Tuotanto	4.13	13.06	5.28	3.13	6.22	5.63
Kulutus	2.14	25.34	10.18	5.40	9.10	6.68
Ylijäämä	1.99					
Alijäämä		12.28	4.90	2.27	2.88	1.05

Kaikki kuljetukset on ylituotantoalueilta alituotantoalueille ajateltu suoritettavan maanteitse. Kun rahti tonnikilometriä kohden laskien voidaan arvioida 26 mk:ksi, saadaan eri alueiden väliset kuljetuskustannukset yhden perunatonnin siirrosta kertomalla alueiden etäisyydet tonnikilometrin hinnalla. Näin lasketut kuljetuskustannukset on esitetty taulukossa 8.

Näiden perustietojen ja olettamusten varassa voidaan laskea kuljetusprobleemien ratkaisua varten kehitetyllä tekniikalla, miten kuljetukset olisi hoidettava, jotta niistä aiheutuva kokonaiskustannus muodostuisi mahdollisimman alhai-

Taulukko 8. Kuljetuskustannukset ylituotantoalueiden osuuskaupoista alituotantoalueiden kauppoihin, mk/tn laskettuna.

Alituotanto-alueet	Ylituotantoalueet							
	1	2	3	4	5	6	7	8
9	780	3170	3120	4030	3120	6940	6450	5720
10	3900	2440	2050	4470	6240	4210	4910	1530
11	1560	3850	2080	5230	5720	6790	7490	7800
12	4160	2600	4190	1350	3250	2520	2110	3430
13	5200	3510	4550	4550	7020	1300	2680	2470

seksi. Probleemin olettamukset voidaan matemaattisesti esittää seuraavaan tapaan, kun kuljetettavana on homogeninen hyödyke, ts. hyödyke, joka millä tahansa alueella tuotettuna tyydyttää yhtä hyvin minkä tahansa alueen tarvetta. Jos merkitään yhden yksikön kuljetuksesta ylituotantoalueelta (j) alituotantoalueelle (i) aiheutuvaa kustannusta (c_{ij}) ja kuljetettavaa määrää vastaavasti (x_{ij}), voidaan kokonaiskuljetuskustannuksen (z_o) minimoimisvaatimus kirjoittaa muodossa

$$\text{min. } z_o = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}.$$

Ratkaisussa on rajoituksina otettava huomioon, että kullekin alueelle kuljetettavan määrän yhteensä tulee olla yhtä suuri kuin ko. alueen vajaus (y), eli

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = y_i, \; (i = 1,2,\dots,m).$$

Vastaavasti on edellytyksenä, että miltään alueelta ei merkitä pois kuljetettavaksi eri alueille yhteensä enempää tai vähempää kuin ko. alueen ylituotanto (b). (Alituotantoalueiden vajausta ei saa merkitä negatiiviseksi ylituotannoksi, koska kuljetuskustannus on aina positiivinen).

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, (j = 1,2,\dots,n).$$

Edellä esitettyjen vaatimusten täyttämisestä on luonnollisesti seurauksena, että kaikkien ylituotantomäärien summa on yhtä kuin kaikkien vajausten summa:

$$\sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{i=1}^{m} y_i.$$

Ensimmäisenä tehtävänä käsillä olevan probleemin ratkaisussa on laatia jokin sellainen kuljetusohjelma, että kysyntä kaikilla alueilla tulee tyydytetyksi. Toisessa vaiheessa on tutkittava, voidaanko tätä ratkaisua parantaa niin, että kuljetuskustannus alenee. Kolmanneksi on alkuperäistä suunnitelmaa muutettava uudeksi vaatimukset täyttäväksi ratkaisuksi. Prosessi on toistettava, kunnes parannusmahdollisuuksia ei enää löydy.

Taulukkoon 9 on ensimmäistä ratkaisua varten merkitty alariville kultakin ylituotantoalueelta muualle vietäväksi joutava perunamäärä ja äärimmäiseen sarakkeeseen oikealle eri alituotantoalueiden vajaukset. Ryhdyttäessä näitä vajauksia täyttämään voidaan aloittaa taulukon vasemmasta yläkulmasta siten, että alueen 1 ylituotanto ajatellaan kuljetettavan kokonaisuudessaan alituotantoalueelle 9. Ruutuun 9:1 merkitään siis 1.66 milj.kg. Kun alituotantoalueen 9 vajaus on 12.28 milj.kg, tarvitaan sen täyttämiseen myös alueiden 2 ja 3 ylituotannot kokonaisuudessaan sekä alueen 4 ylituotannosta 1.04 milj.kg. Alueelle 4 jää tällöin vielä 3.98 milj.kg:n ylijäämä, joka voidaan merkitä kuljetettavaksi alituotantoalueelle 10. Alueen 5 ylituotannosta merkitään sille lisäksi 0.92 milj.kg. Näin jatketaan kunnes kaikkien alituotantoalueiden tarve on tyydytetty.

Näin on saatu ns. käypä kantaohjelma, (kantaohjelman vaatimuksista ks. HEADY, CANDLER s. 345), joka on muodostettu välittämättä lainkaan kuljetuskustannuksista ja jota siis ilmeisesti voidaan vielä parantaa. Perusratkaisun kokonaiskuljetuskustannus saadaan kertomalla kukin taulukon 9 ruutuun merkitty perunamäärä vastaavalla kuljetuskustannuksella, joka on ilmoitettu taulukossa 8:

(1660000)(0,78) + (6780000)(3,17) + (2800000)(3,12) + (1040000)(4,03) +...... = 82762700 mk.

Taulukko 9. Käyvän kantaohjelman mukaiset kuljetusmäärät alueiden välillä milj.kg.

Alituotanto-alueet	Ylituotantoalueet								
	1	2	3	4	5	6	7	8	Yht.
9	1.66	6.78	2.80	1.04					12.28
10				3.98	0.92				4.90
11					1.95	0.32			2.27
12						0.68	1.26	0.94	2.88
13								1.05	1.05
Yht.	1.66	6.78	2.80	5.02	2.87	1.00	1.26	1.99	23.38

Perusratkaisun parantamiseksi on pyrittävä laskemaan, kannattaako laaditussa kuljetussuunnitelmassa esitettyjen kuljetusteiden lisäksi ylituotantoalueilta poiketa muillekin alituotantoalueille ts. taulukon tyhjiin ruutuihin. Tätä tarkastelua varten on kehitetty ns. "stepping-stone"- eli porrasmenetelmä, jonka avulla voidaan hinnoitella kuljetuskustannusten laskemista varten perusratkaisussa käyttämättä jääneet ruudut. On selvää, että jokainen poikkeaminen alkuperäisestä kuljetussuunnitelmasta aiheuttaa lukuisia muutoksia ratkaisuun. Jos ajatellaan tuoda 1. ylituotantoalueelta perunoita esim. 1 tn alituotantoalueelle 11 eli ruutuun 11:1, menettää alkuperäinen ratkaisu tasapainonsa, koska silloin alue 11 saa 2 271 tn 2 270 tn:n sijasta ja alueelta 1 vaaditaan 1 tn yli sen tuotantokyvyn. Jotta ratkaisun perusedellytystä tarpeen ja tuotannon tasapainosta ei rikottaisi uusia mahdollisia kuljetusteitä näin hinnoiteltaessa, on porrasmenetelmää noudatettaessa laskettava kaikkien perusratkaisun kuljetustiehen aiheutuvien muutosten yhteisvaikutus kustannuksiin. Tasapainon ylläpitämiseksi ruutua 11:1 hinnoiteltaessa vähennetään ruudusta 11:5, joka kuuluu perusratkaisun kuljetustiehen, 1 tn. Koska tällöin alueen 5 tuotantoa ei ole käytetty kokonaan, lisätään ruutuun 10:5 1 tn ja vähennetään ruudusta 10:4 sekä edelleen lisätään ruutuun 9:4 ja vähennetään ruudusta 9:1 1 tn. Ruudun 11:1 hinnoittelemiseksi siten, että tasapaino kokonaissuunnitelmassa säilyy, on muutos polulla siis ajateltava seuraavasti:

$$\overset{+}{11{:}1} \longrightarrow \overset{-}{11{:}5} \longrightarrow \overset{+}{10{:}5} \longrightarrow \overset{-}{10{:}4} \longrightarrow \overset{+}{9{:}4} \longrightarrow \overset{-}{9{:}1} \longrightarrow 11{:}1$$

Hinnoittelua suoritettaessa on yleisenä periaatteena, että ensiksi siirrytään vaakasuoraan perusratkaisun kuljetussuunnitelmassa käytettyyn ruutuun. Sen jälkeen siirrytään pystysuoraan ylös ja jälleen vaakasuoraan perusratkaisun polulla. Näin jatketaan "portaittain" siirtymistä pitkin vaaka- ja pystysuoria rivejä kunnes tullaan sille pystyriville, jolla lähtöruutu sijaitsee. (Yhtä hyvin voidaan lähteä

Taulukko 10. Käyvän kantaohjelman mukaiset kuljetusmäärät milj.kg (merkitty x:llä) ja aktivoimattomien ruutujen hinnat mk/tn.

Alituotanto-alueet	Ylituotantoalueet								Yht.
	1	2	3	4	5	6	7	8	
9	1.66^x	6.78^x	2.80^x	1.04^x	-2680	70	-10	-2060	12.28
10	2680	-1170	-1510	3.98^x	0.92^x	-3100	-1990	-6690	4.90
11	860	760	-960	1280	1.95^x	0.32^x	1110	100	2.27
12	7730	3780	5420	1670	1800	0.68^x	1.26^x	0.94^x	2.88
13	9730	5650	6740	5830	6530	-260	1530	1.05^x	1.05
Yht.	1.66	6.78	2.80	5.02	2.87	1.00	1.26	1.99	23.38

ensin pystyriviä pitkin, jolloin päädytään lähtövaakariville). Tällaisen muutoksen (ns. polun, path)hinnoittelu tapahtuu taulukkoa 8 hyväksikäyttäen seuraavasti. Yhden perunatonnin kuljetus ruutuun 11:1 maksaa .1560 mk; ruutuun 11:5 tuodaan 1 tonni vähemmän, jolloin säästetään .5720 mk jne. Jos on siis kyseessä negatiivinen askel, säästetään, jos taas positiivinen, kustannus lisääntyy. Muutoksen kokonaiskustannus on 1560 - 5720 + 6240 - 4470 + 4030 - 780 = 860 mk. Vastaavasti voidaan suorittaa ruudun 10:2 hinnoittelu, mikä tapahtuu 4 askeleella polkua

$$10{:}2 \xrightarrow{+} 10{:}4 \xrightarrow{-} 9{:}4 \xrightarrow{+} 9{:}2 \xrightarrow{-} 10{:}2$$

pitkin, jolloin kuljetuskustannukseksi saadaan

2440 - 4470 + 4030 - 3170 = -1170 mk.

Tässä tapauksessa säästämme kustannuksissa. Vastaavasti hinnoitellaan jokainen taulukon 3 tyhjä ruutu. Laskuteknillisesti on kuitenkin suhteellisen hankalaa hinnoitella esim. ruutu 13:1, koska tällöin joudutaan tekemään 10 askelta. Tästä päästään kuitenkin muodostamalla ns. valepolku (pseudo-path). Lasketaan aluksi ne ruudut, joissa päästään 4 askeleella, ja käytetään sitten näitä apuna. Esim. jos ruutu 10:1 on jo hinnoiteltu, 11:1:n laskemista voidaan lyhentää seuraavasti:

$$11{:}1 \xrightarrow{+} 11{:}5 \xrightarrow{-} 10{:}5 \xrightarrow{+} 10{:}1 \xrightarrow{-} 11{:}1,$$

jolloin saatuun summaan on lisättävä ruudun 10:1 laskettu arvo seuraavasti: 1560 - 5720 + 6240 - 3900 + 2680 = 860. Jos käytetty kantaohjelmassa aktivoimaton ruutu sattuu positiiviselle askeleelle, on silloin suoritettava vastaavasti vähentäminen. Esim. 12:5 voitaisiin laskea seuraavasti (edellyttäen että ruutu 11:7 on hinnoitettu): 3250 - 2110 + 7490 - 5720 - 1110 = 1800. Suurissa ratkaisuissa tällä menetelmällä on varsin huomattava merkitys. Ratkaisua käytännössä suoritettaessa ei luonnollisesti ole tarpeen merkitä kunkin askeleen hintaa erikseen paperille, vaan välitulokset voidaan sijoittaa kumulatiivisesti laskukoneeseen.

Kun koko taulukko 10 on laskettu valmiiksi huomataan, että muuttamalla kantaohjelmaa siten, että ylituotantoalueelta 8 viedään perunoita alituotantoalueelle 10, eli teknillisesti sanottuna ruutua 10:8 aktivoimalla, säästetään eniten, koska sen hinnoittelussa saama negatiivinen arvo on korkein. Siihen on tuotava niin paljon kuin vain perusratkaisussa välttämättömät muutokset sallivat. Muutoksen vaatima polku on seuraava:

$$\overset{+}{10{:}8} \longrightarrow \overset{-}{10{:}5} \longrightarrow \overset{+}{11{:}5} \longrightarrow \overset{-}{11{:}6} \longrightarrow \overset{+}{12{:}6} \longrightarrow \overset{-}{12{:}8} \longrightarrow 10{:}8$$

Pienin polun negatiivisista askelmista on (11:6):n 0.32, joka määrä siis vain voidaan siirtää 10:8:aan, koska mitään ruutua ei saa tehdä negatiiviseksi. Muuttamalla kantaohjelmaa tätä vastaavaksi, saadaan ratkaisu II, (taulukko 11), jonka kokonaiskustannus muodostuu 80 621 900 mk:ksi eli 2 140 800 mk perusratkaisun kustannusta pienemmäksi.

Kun uusi ratkaisu hinnoitetaan, säilyvät ennallaan ne ruudut, jotka eivät sattuneet vasta "aktivoidun" ruudun polulle. Muiden ruutujen hinnoittamisesta selviydytään helpoimmin seuraavasti: edellisen ratkaisun mukaiseen ruudun hintaan lisätään tai vähennetään aktivoidun ruudun hinta sen mukaan, onko se laskettavassa polussa positiivisena vai negatiivisena askeleena. Esim. ruudun 10:6 hinnoittaminen tapahtuu seuraavasti:

$$\overset{+}{10{:}6} \longrightarrow \overset{-}{12{:}6} \longrightarrow \overset{+}{12{:}8} \longrightarrow \overset{-}{10{:}8} \longrightarrow 10{:}6$$

Uusi ruutu 10:8 on hinnoittelussa negatiivisena askeleena. 10:6:n arvoksi saadaan siis - 3100 -(-6690) = 3590. (Tavallisesti laskien: 4210 - 2520 + 3430 - 1530 = 3590).

Jos hinnoittelun perusteella voidaan vielä todeta negatiivisia ruutuja, aktivoidaan niistä itseisarvoltaan suurin ruutu edellä selostetulla tavalla. Ratkaisussa 2 ko. ruutu on 12:4. Ratkaisua jatketaan kunnes päädytään tulokseen, jolloin hinnoittelussa ei enää ilmene yhtään negatiivista ruutua. Esimerkkitapauksessa tämä tilanne saavutettiin 9, ratkaisussa, joka kuljetuskustannuksen minimiin johtavana on esitetty taulukossa 12.

Taulukko 11. Ratkaisun II mukaiset kuljetusmäärät milj.kg (merkitty x:llä) ja tässä ratkaisussa aktivoimattomien ruutujen hinnat mk/tn.

Alituotanto-alueet	Ylituotantoalueet								Yht.
	1	2	3	4	5	6	7	8	
9	1.66^{x}	6.78^{x}	2.80^{x}	1.04^{x}	-2680	6760	6680	4630	12.28
10	2680	-1170	-1510	3.98^{x}	0.60^{x}	3590	4700	0.32^{x}	4.90
11	860	760	-960	1280	2.27^{x}	6690	7800	6790	2.27
12	1040	-2910	-1270	-5020	-4890	1.00^{x}	1.26^{x}	0.62^{x}	2.88
13	3040	-1040	50	-860	-160	-260	1530	1.05^{x}	1.05
Yht.	1.66	6.78	2.80	5.02	2.87	1.00	1.26	1.99	23.38

Taulukko 12. Lopullisen ratkaisun mukaiset kuljetusmäärät, milj.kg (merkitty x:llä) ja tässä ratkaisussa aktivoimattomien ruutujen hinnat mk/tn.

Alituotanto-	Ylituotantoalueet								Yht.
alueet	1	2	3	4	5	6	7	8	
9	1.66^{x}	4.40^{x}	340	3.35^{x}	2.87^{x}	3530	1660	3460	12.28
10	3850	2.38^{x}	0.53^{x}	1170	3850	1530	850	1.99^{x}	4.90
11	1480	1380	2.27^{x}	1900	3300	4080	3400	6240	2.27
12	6060	2110	4090	1.67^{x}	2810	1790	1.21^{x}	3850	2.88
13	6530	2450	3880	2630	6010	1.00^{x}	0.05^{x}	2320	1.05
Yht.	1.66	6.78	2.80	5.02	2.87	1.00	1.26	1.99	23.38

Kun edellä esitetyssä esimerkissä perunan kulutus ja tuotanto yksinkertaisesti oletettiin kaikki alueet huomioon ottaen yhtä suuriksi, voidaan kysyä, miten kuljetus olisi järjestettävä siinä tapauksessa, että joillakin ylituotantoalueilla tuotanto lisääntyy niin, että kulutus ja tarve eivät olekaan enää tasapainossa. Seuraavassa esimerkissä on alueen 2 ylituotanto lisätty 8.34 milj.kg:ksi, alueen 4 ylituotanto 6.75 milj.kg:ksi, alueen 7 1.85 milj.kg:ksi ja alueen 8 3.25 milj.kg:ksi. Oletetaan, että kulutus säilyy ennallaan. Silloin jää käyttämättä 5.14 milj.kg ja on selvitettävä, minkä alueiden osalle tätä vastaava määrä jätetään kulutukseen toimittamatta. Tehtävän ratkaisemiseksi muodostetaan uusi hypoteettinen alituotantoalue (№ 14), jonka tarpeeksi merkitään juuri 5.14 milj.kg. Näin saadaan tuotanto ja kysyntä ratkaisua varten tasapainoon. Siis alueelle 9 tarvitaan 12.28, alueelle 10 4.90, alueelle 11 2.27, alueelle 12 2.88, alueelle 13 1.05 ja alueelle 14, ns. apualueelle, 5.14 milj.kg. Koska alue 14 "kerää" ne määrät, jotka jäävät kuljettamatta, merkitään kuljetuskustannukset tälle alueelle jokaiselta ylituotantoalueelta 0:ksi. Tehtävä voidaan nyt ratkaista edellä selostettua menetelmää käyttäen.

Seuraavassa käytetään kuitenkin perusratkaisun löytämiseksi ns. tarkastelumenetelmää, jonka avulla pyritään laskutyön vähentämiseksi saamaan jo kantaohjelma mahdollisimman hyväksi. Edellisessä ratkaisussahan kustannukset laskivat 82 milj:sta minimiin eli 58 miljoonaan markkaan vasta 9. ratkaisun jälkeen. Taulukkoa ei nyt ryhdytä täyttämään umpimähkäisesti kuten edellä, vaan kuljetuskustannuksiltaan halvimmasta (taulukko 8) ruudusta lähtien. Alue 14, jonka kuljetuskustannukset ovat = 0, jätetään tässä vaiheessa huomioimatta. Halvin ruutu on 9:1, jossa kustannus on 780 mk/tn. Alituotantoalueen 9 tarve täytetään siten mahdollisuuksien mukaan ylituotantoalueelta 1. Alueelle 9 tarvitaan kaikkiaan 12.28 milj.kg, mutta alue 1 voi tuottaa vain 1.66 milj.kg. Ruutuun merkitään siten 1.66. Seuraavaksi halvin

Taulukko 13. Tarkastelumenetelmää (inspection method) käyttäen saatu käypä kantaohjelma ylituotantoprobleemissa. Määrät milj.kg.

Alituotanto-	Ylituotantoalueet								Yht.
alueet	1	2	3	4	5	6	7	8	
9	1.66	6.75		3.87					12.28
10			1.65					3.25	4.90
11		1.12	1.15						2.27
12				2.88					2.88
13						1.00	0.05		1.05
14		0.47			2.87		1.80		5.14
Yht.	1.66	8.34	2.80	6.75	2.87	1.00	1.85	3.25	28.52

ruutu on 13:6. Alueelle 13 tarvitaan kaikkiaan 1.05 milj.kg, mutta alue 6 voi luovuttaa vain 1.00 milj.kg. Kolmanneksi halvin ruutu on 12:4, johon voidaan merkitä 2.88 milj.kg. Silloin on alueen 12 tarve tyydytetty kokonaan, mutta alue 4 voi luovuttaa vielä 3.87 milj.kg. Seuraava ruutu on 10:8, johon voidaan merkitä 3.25 milj.kg. Viidenneksi halvin ruutu on 11:1. Alueelle 11 voidaan tuoda kaikkiaan 2.27 milj. kg, mutta alue 1 voi tuottaa ainoastaan 1.66 milj.kg, joka määrä on jo kuljetettu ruutuun 9:1. Näin ollen tähän ruutuun 11:1 ei voida merkitä mitään. Näin jatkaen täytetään koko taulukko 13.

Seuraavana tehtävänä on jälleen kantaohjelman parantaminen. Aktivoitavien ruutujen löytämiseksi voidaan laskelma suorittaa edellä selostetun porrasmenetelmän mukaisesti, mutta vaihtoehtoisesti voidaan suositella ns. MODI-menetelmää, jota käytetään seuraavassa.

Tätä menetelmää sovellettaessa on selvitettävä, kuinka kuljetuskustannus muuttuu, kun 1 tn suuruista perunaerää siirretään polkua pitkin aktivoidusta ruudusta toiseen. Jos esim. ruudusta 9:1, jonka kuljetuskustannusarvo on 780 siirrytään ruutuun 9:2, lisääntyy kustannus 2390 (= 3170 - 780) mk:lla. Ruudusta 9:2 ruutuun 11:2 siirryttäessä (siis alituotantoalueelta 9 alueelle 11) lisääntyy kustannus 780 (= 3850 - 3170) mk:lla. Näin siis ruudun 11:2 kuljetuskustannus muodostuu kahdesta tekijästä: 2390 mk siitä, että siirrytään ylituotantoalueelta toiselle, ja 1460 mk siitä, että siirrytään ylituotantoalueelta 1 alituotantoalueelle 11 polkua pitkin. Jos nyt ruudusta 11:2 siirrytään aktivoimattomaan ruutuun 11:1, laskee kustannus 2390 mk, koska siirtyminen tapahtuu tässä tapauksessa ylituotantoalueelta 2 ylituotantoalueelle 1. Näin siis ruudun 11:1 kuljetuskustannukseksi tulee 3850 - 2390 = 1460 mk. Kun "perusruudusta" 9:1 kuljetaan jokaiseen aktivoituun ruutuun polkua pitkin, saadaan kaikki ne komponentit (riviarvot, row values), jotka ilmaisevat kuljetuskustannukset ylituotantoalueelta 1 kullekin alituotantoalueelle, ja ne arvot (sarakearvot, Taulukko 14. MODI-menetelmällä hinnoitettujen solujen arvot ylituotantoprobleemin kantaohjelmassa mk/tn.

Alituotanto-alueet	Ylituotantoalueet 1	2	3	4	5	6	7	8	Rivi-summa
9	780	3170	1400	4030	3170	1790	3170	880	780
10	1430	3820	2050	4680	3820	2440	3820	1530	1430
11	1460	3850	2080	4710	3850	2470	3850	1560	1460
12	-1900	490	-1280	1350	490	-890	490	-1800	-1900
13	290	2680	910	3540	2680	1300	2680	390	290
14	-2390	0	-1770	860	0	-1380	0	-2290	-2390
Sarakesumma	0	2390	620	3250	2390	1010	2390	100	

column values), jotka ilmaisevat kuljetuskustannukset ylituotantoalueelta 1 muille ylituotantoalueille. Kunkin ruudun, myös aktivoimattoman, arvo saadaan seuraavasti:

Ruudun arvo = rivisumma + sarakesumma.

Laskuteknillisesti hinnoittaminen tapahtuu seuraavasti. Taulukkoon merkitään ensin aktivoitujen ruutujen arvot alkuperäisestä kuljetuskustannustaulukosta 2. Alueen 1 sarakesummaksi merkitään 0, jolloin rivin 9 rivisummaksi saadaan 780. Sarakesumma 2 määräytyy silloin seur: 3170 - 780 = 2390. Polkua pitkin päästään ruutuun 11:2, ja rivisummaksi 11 saadaan 3850 - 2390 = 1460. Seuraava ruutu on 11:3 ja sarakesummaksi 3 saadaan 620. Kun kaikki rivi- ja sarakesummat on saatu lasketuksi, on helppo määrätä aktivoimattomien ruutujen arvot yllä olevan kaavan (ruudun arvo = rivisumma + sarakesumma) mukaan.

Aktivoitavien ruutujen löytämiseksi verrataan saatua taulukkoa 14 alkuperäiseen kuljetuskustannustaulukkoon 8. Niitä ruutuja, joiden alkuperäinen kuljetuskustannus on pienempi kuin uusi arvo, on aktivoitava. Useampiakin muutoksia voi tehdä samalla kertaa (vrt. HEADY, CANDLER 1958, s.353). Suurin säästö yksikköä kohden saadaan aikaan aktivoimalla ruutua 10:2, sillä sen kohdalla on erotus 3820 - 2440 = 1380. Aktivoiminen tapahtuu polkua

$$\overset{+}{10:2} \longrightarrow \overset{-}{10:3} \longrightarrow \overset{+}{11:3} \longrightarrow \overset{-}{11:2} \longrightarrow 10:2$$

pitkin. Sen sijaan ruutua 10:4 ei voida aktivoida, sillä sitä varten jouduttaisiin kulkemaan polkua, jossa uusi ruutu 10:2 olisi negatiivisena askeleena. Solun 14:4 aktivoiminen tapahtuu polkua

$$\overset{+}{14:4} \longrightarrow \overset{-}{14:2} \longrightarrow \overset{+}{9:2} \longrightarrow \overset{-}{9:4} \longrightarrow 14:4$$

pitkin sekä ruudun 9:5 aktivoiminen vastaavasti

$$\overset{+}{9:5} \longrightarrow \overset{-}{14:5} \longrightarrow \overset{+}{14:2} \longrightarrow \overset{-}{9:2} \longrightarrow 9:5 .$$

Näitä polkuja vertailtaessa huomataan, että edellisessä tapauksessa ruutu 14:2 on negatiivisena ja jälkimmäisessä tapauksessa positiivisena askeleena, joten on edullisinta suorittaa jälkimmäinen aktivointi ensin. Näin tehden ei ruutua 14:4 tarvitse aktivoida kahteen kertaan. Päinvastaisessa tapauksessa, siis ensin ruudun 14:4 ja sitten ruudun 9:5 aktivointi, ratkaisu sisältäisi ns. suljetun polun "self-contained path'in", (vrt. HEADY, CANDLER s. 367), jolloin jokainen polun

$$\overset{+}{14:4} \longrightarrow \overset{-}{14:2} \longrightarrow \overset{+}{9:2} \longrightarrow \overset{-}{9:4} \longrightarrow 14:4$$

askel olisi aktiivinen, mutta tällaista ei saa esiintyä ratkaisussa, vaan ruutua 14:4 on aktivoitava, kunnes jokin polun negatiivisista askeleista tulee nollaksi.

Tätä menettelyä käyttäen on jo toisessa ratkaisussa saatu optimitulos, joka on esitetty taulukossa 15. Vertailun avulla voidaan todeta, että siinä kaikki MODI-menetelmällä hinnoitetut ruudut ovat arvoltaan pienempiä tai yhtä suuria kuin alkuperäisessä kuljetuskustannustaulukossa 8, mikä on luonnollisesti optimiratkaisun kriteeriona MODI-menetelmässä.

Ratkaisun tarkistamiseksi voidaan laskea vielä kuljetuskustannukset kantaohjelmassa ja lopullisessa ratkaisussa. Edellisessä tulee kustannukseksi 58 milj.mk ja jälkimmäisessä 54 milj.mk, joten todellakin on saatu parempi ratkaisu. Loppuratkaisusta nähdään, että alueelle 4 jää käyttämättä 3.34 milj.kg ja alueelle 7 1.80 milj.kg.

Esitetyssä ylituotantotilanteessa voidaan ajatella jouduttavan etsimään perunalle uusia menekkimahdollisuuksia esim. perunajauhon muodossa. Tällöin tulee ratkaistavaksi kysymys tehtaan sijoittamisesta jollekin paikkakunnalle, jonne koko ylituotanto 5.14 milj.kg kuljetetaan. Edullisinta paikkaa ei voida kuitenkaan määrätä suorastaan käyttämällä ylläolevia menetelmiä, vaan on laskettava kaikkien mahdollisten sijoituspaikkojen kuljetuskustannus a.o. optimaalisen suunnitelman mukaan edellä esitettyjä menetelmiä käyttäen ja valittava niistä edullisin. Jos esimerkissämme perunajauhotehdas sijoitetaan alueelle 4, laskee sen

Taulukko 15. Lopullisen ratkaisun mukaiset kuljetusmäärät ylituotantoproblemissa, milj.kg.

Alituotanto-	Ylituotantoalueet								Yht.
alueet	1	2	3	4	5	6	7	8	-
9	1.66	7.22		0.53	2.87				12.28
10		1.12	0.53					3.25	4.90
11			2.27						2.27
12				2.88					2.88
13						1.00	0.05		1.05
14				3.34			1.80		5.14
Yht.	1.66	8.34	2.80	6.75	2.87	1.00	1.85	3.25	28.52

Taulukko 16. Tarkastelumenetelmällä saatu kantaohjelma kuljetusprobleemissa, kun perunajauhotehdas on sijoitettu alueelle 4.

Alituotanto-	Ylituotantoalueet								Yht.
alueet	1	2	3	4	5	6	7	8	
9	1.66	7.75			2.87				12.28
10			1.65					3.25	4.90
11		0.59	1.15				0.53		2.27
12				1.61			1.27		2.88
13						1.00	0.05		1.05
Yht.	1.66	8.34	2.80	1.61	2.87	1.00	1.85	3.25	23.38

Taulukko 17. Lopullinen ratkaisu kuljetusprobleemissa perunajauhotehtaan ollessa alueella 4.

Alituotanto-	Ylituotantoalueet								Yht.
alueet	1	2	3	4	5	6	7	8	
9	1.66	7.22		0.53	2.87				12.28
10		1.12	0.53					3.25	4.90
11			2.27						2.27
12				1.08			1.80		2.88
13						1.00	0.05		1.05
Yht.	1.66	8.34	2.80	1.61	2.87	1.00	1.85	3.25	23.38

ylituotanto 6.75:stä 1.61:een. Muitten alueitten ylituotanto säilyy entisellään samoin kuin tarve alituotantoalueilla. Optimaalista kuljetussuunnitelmaa seurattaessa muodostuu kokonaiskuljetuskustannukseksi 55.4 milj.mk. Jos perunajauhotehdas sensijaan sijoitettaisiin alueelle 2 laskee sen ylituotanto 3.20 milj.kg:aan. Muut ratkaisun rajoitukset säilyvät ennallaan ja kustannuksiksi saadaan tässä tapauksessa 55.9 milj.mk, siis hiukan enemmän kuin edellisessä tapauksessa. Jos sen sijaan tehdas perustetaan alueella 3 ei sen oma tuotanto riitä, vaan alueesta tulee tällöin alituotantoalue. Ratkaisussa on tällöin ylituotantoalueet 1, 2, 4, 5, 6, 7 ja 8, ja alituotantoalueet 9, 10, 11, 12, 13 ja 3. Tässä tapauksessa on kokonaiskustannus 68 milj.mk, eli huomattavasti edellisiä korkeampi. Perunajauhotehtaan sijoittaminen alueelle 4 osoittautuu kaikkein edullisimmaksi eri vaihtoehdoista. Taulukossa 16 on esitetty sitä vastaava taskastelumenetelmällä saatu perusratkaisu ja taulukossa 17 lopputulos.

Pyrittäessä yleisesti arvostelemaan edellä esimerkkien valossa tarkasteltujen ratkaisutapojen merkitystä ja soveltamismahdollisuuksia erilaisiin maataloustavarakaupassa esiintyviin kuljetusprobleemeihin on huomio kiinnitettävä lähinnä kaupan organisatioon ja kuljetuskustannusten merkitykseen hinnanmuodostuksessa. Luonnollisesti voidaan näinkin vaativia ratkaisumenetelmiä suositella käytettäväksi ainoastaan suhteellisen suurissa liikelaitoksissa. Välttämätöntä on lisäksi, että liikkeen organisaatio on varsin tiivis, niin että keskuksesta käsin voidaan kiistattomasti ratkaista, minne alituotantoalueiden liikkeet suuntaavat hankintansa. Tällaiset ratkaisut edellyttävät vielä, että kuljetustarve on huomattavan suuri ja että siitä aiheutuvat kustannukset muodostavat huomattavan osan tavaran hinnasta. Sikäli kuin nämä perusedellytykset on täytetty, voidaan lineaarisen ohjelmoinnin käyttömahdollisuuksien selvittämistä käytännön kuljetusongelmien ratkaisuun pitää tarkoituksenmukaisena.

5. Kasvinviljelytuotannon sijoittaminen.

Kun valtion harjoittaman aktiivisen tuotantopolitiikan merkitys on ilmeisesti vuodesta toiseen kasvamassa, joudutaan asetettuja tuotantotavoitteita toteutettaessa ratkaisemaan jo puhtaasti laskuteknillisessä mielessä varsin vaikeita tehtäviä. Tyypillisenä esimerkkinä tällaisista pulmista voidaan mainita viime vuosina esiintynyt pyrkimys viljan tuotannon edistämiseen nimenomaan rukiin kohdalta, jolloin tavoitteeksi asetettuun rukiin viljelyn laajentamiseen tietyillä alueilla pyritään maksamalla näillä alueilla tuotetusta rukiista korkeampaa hintaa kuin muualla maassa. Jotta korkeimman hinta-alueen rajat voitaisiin oikein määrätä, olisi mm. selvitettävä, missä osissa maata rukiin viljely on suhteellisesti edullisinta.

Tätä kysymystä ei luonnollisesti voida ratkaista karkeassakaan vertailussa pelkästään rukiin ha-satovertailujen avulla eri alueilla, vaan huomioon on otettava myös muille viljelykasveille asetetut tuotantotavoitteet ja niiden ha-sadot. Sinänsähän on selvää, että rukiista voidaan esim. maan eteläosissa saada parempi sato kuin pohjoisemmilla viljelyalueilla, mutta yhtä ilmeistä on, että vehnän tuotantotavoitteen täyttäminen on suhteellisesti vielä edullisempaa etelässä. Kun satoalueita olisi tällaiseen vertailuun otettava varsin monia, jopa useita kymmeniä, joista jokaisella olisi tarkastettava vähintään 6-7 viljelykasvia, muodostuu probleemi niin laajaksi, että siitä ei voida tyydyttävästi selvitä ilman systemaattista käsittelyä. Tällaiseen käsittelyyn tarjoaa lineaarinen ohjelmointi mahdollisuuden.

Vaikka erilaisten tuotantopoliittisten ratkaisujen yhteydessä muodossa tai toisessa esiin tuleva kysymys maataloustuotannon edullisimmasta jakaantumisesta eri maatalousalueille tiettyyn tuotantotavoitteeseen pyrittäessä, on varsin monitahoinen kysymys, on sitä seuraavassa tarkasteltu yksinomaan suhteellisten satotulosten valossa. Tarkemmassa taloudellisessa laskelmassa olisi luonnollisesti kiinnitettävä huomiota myös tuotantokustannuksiin, mutta niissä esiintyvät erot pinta-alayksikköä kohden eri alueilla ovat ilmeisesti suhteellisen pienet nimenomaan kansantaloudellisen vertailun kannalta ja ne onkin seuraavassa jätetty sivuun. Edelleen olisi tarkkuuteen pyrittäessä otettava huomioon kuljetuskustannukset tuotantopaikalta kulutuskeskukseen. Nehän muodostavat varsin merkittävän erän eräiden tuotteiden esim. perunan viljelyn sijoittumista ajatellen. Näiden kustannusten vaikutus voitaneen haluttaessa ottaa huomioon käyttämällä satojen nettoarvoja vertailuperusteena alueen omavaraisuuden ylittävältä tuotannon osalta.

Vertailua varten voidaan satojen suuruus eri alueilta käytännössä selvittää aikaisemmilta vuosilta. On kuitenkin tärkeä huomata se periaatteellinen heikkous, joka tällaiseen aineistoon sisältyy pyrittäessä arvioimaan muutosmahdollisuuksia eri kasvien viljelylaajuudessa. Onhan ilmeistä, että erityisesti vaativampien kasvien kohdalla viljelyä laajennettaessa marginaalisadot eivät muodostu tilastossa ilmenevien keskiarvojen mukaisiksi. Tämä seikka aiheuttaa luonnollisesti vaikeuksia täysin riippumatta siitä, millä menetelmällä satovertailujen teko tapahtuu. Lineaarisella ohjelmoinnilla on tässä suhteessa kuitenkin se etu, että probleemin käsittelyyn voidaan liittää tällaisten näkökohtien vaatimia lisätekijöitä, kuten tässä tapauksessa esim. viljelylaajuutta rajoittavana tekijänä eri alueilla käytettävissä olevan viljelymaan jakautumista erilaisiin maalajeihin.

Muina viljelyn laajuutta eri kasvien kohdalla rajoittavina tekijöinä tulevat kysymykseen mm. viljelykiertoon liittyvät näkökohdat ja käytettävissä olevan työvoiman määrä erityisesti työhuippukausina, joita lineaarisen ohjelmoinnin puitteissa voidaan käsitellä täysin siinä laajuudessa kuin käytettävissä olevat perustiedot sallivat.

Niitä mahdollisuuksia, joita lineaarinen ohjelmointi tarjoaa tällaisten tuotantopoliittisten ongelmien ratkaisemiseksi on seuraavassa tarkasteltu esimerkin avulla, jossa tehtäväksi on asetettu selvittää, miten omavaraisuuteen tarvittavan kasvinviljelytuotannon olisi sijoituttava maan eri alueille, jotta sijoittuminen toteuttaisi annetun kokonaistavoitteen ja olisi satojen suhteellisen suuruuden perusteella mahdollisimman edullinen.

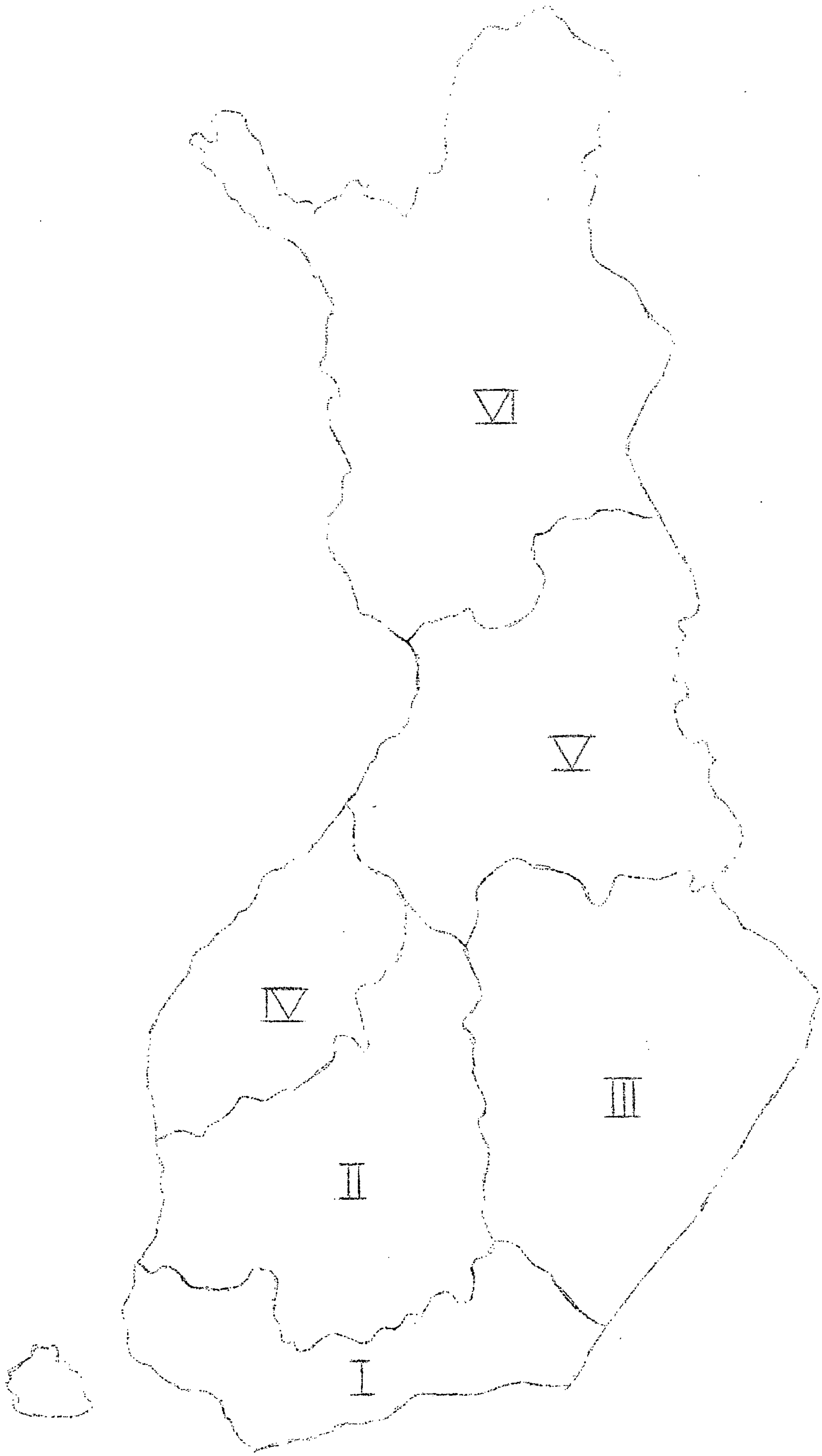
Tässä esimerkkiratkaisussa on maa jaettu kuuteen maatalousalueeseen kartakkeen 1 esittämällä tavalla. Tuotantotavoitteet on määritetty vehnän, rukiin, ohran, kauran, perunan ja heinän osalta siten, että kotieläintuotteet on tavanomaisia kertoimia käyttäen muunnettu rehutarpeeksi. Ratkaisun yksinkertaistamiseksi on juurikasvit, kuten lanttu ja sokerijuurikas jätetty tarkastelun ulkopuolelle. AIV-rehua ja laidunta on käsitelty yhteisen nimikkeen, heinän alla. Tuotantotavoite on tämän karkean arvion mukaisesti, joka luonnollisesti ei mitenkään pyri esittämään perusteltua tuotantopoliittista ohjelmaa, muodostunut seuraavaksi:

Vehnä	390	milj.ry
Ruis	200	-"-
Ohra	280	-"-
Kaura	360	-"-
Peruna	280	-"-
Heinä	1 940	-"-

Eri alueilla käytettävissä olevat pinta-alat (v.1960) ovat seuraavat:

Alue I	628 000	ha
Alue II	686 800	"
Alue III	501 600	"
Alue IV	492 900	"
Alue V	253 600	"
Alue VI	70 300	"

Kartake № 1. Kasvinviljelytuotannon sijoitusprobleemissa käytetyt maatalousalueet.



Näillä alueilla on laskettu viiden vuoden keskimääräiset hehtaarisadot, jotka ilmenevät taulukosta 18 eri tuotteiden kohdalta. Jotta voitaisiin saada kuva siitä, miten normaaliin viljelykiertoon kuuluvia periaatteita ja työvoimakysymyksiä voidaan ottaa ratkaisuissa huomioon, on eri kasvien viljelylaajuudelle asetettu tiettyjä rajoituksia. Ensiksi on edellytetty, että kaikilla alueilla tullaan käyttämään 30 % koko pinta-alasta heinä- ja laidunviljelyyn sekä tässä huomiotta jätetyille kasveille (lanttu, sokerijuurikas ym.). Suunnitelmassa tämä on yksinkertaisinta ottaa huomioon vähentämällä kaikkien alueiden peltoalasta 30 % ja muuntamalla vastaavasti heinälle asetettua ry-vaatimusta, joka alenee 900 milj.ry:öön. Paikallista kulutusta ym. näkökohtia silmälläpitäen on perunan minimialaksi kaikilla alueilla merkitty 1.5 %, mikä otetaan huomioon laskelmissa samalla tavoin kuin heinäalakin. Jäljelle jäävä perunatarve on 203.6 milj.ry. Muut rajoitukset, jotka koskevat jäljellä olevaa pelto-alaa, ovat seuraavat:

Vehnä, korkeintaan		30 %	peltoalasta
Ruis	-"-	15 "	-"-
Kaura ja ohra yht.	-"-	33 "	-"-
Ohra	-"-	13 "	-"-
Peruna	-"-	15 "	-"-
Heinä	-"-	50 "	-"-

Esitetyn probleemin ratkaisuun pyrittäessä on ensimmäisenä tehtävänä määritellä matemaattisesti asetettu tavoite: suhteellisten satojen kannalta edullisin sijoittuminen, joka toteuttaa asetetut vaatimukset tuotannon suuruuteen nähden. Kysymyksen yksinkertaistamiseksi voidaan aluksi ajatella, että tavoitteena on tuottaa vain 2 000 kg vehnää ja käytettävissä on kaksi 1 ha:n peltoa, joista A:n sato on 1500 kg/ha ja B:n 1000 kg/ha. Edullisin sijoittuminen on tällöin ilmeisesti se, että A viljellään kokonaan ja B:stä puolet. Tavoite olisi tietysti voitu täyttää viljelemällä B kokonaan ja A:sta kaksi kolmannesta. Edellinen sijoittaminen on kuitenkin edullisempi koska siten säästynyt maa-ala (viljelykustannuksineen) on suurempi.

Taulukko 18. Rehuyksikkösadot eri alueilla.

	I	II	III	IV	V	VI
Vehnä	1450	1300	1250	1100	1100	
Ruis	1350	1300	1300	1150	1000	
Ohra	1750	1600	1350	1200	1100	950
Kaura	1500	1400	1200	1100	1050	
Peruna	2500	2750	2900	2900	2850	2800
Heinä	1350	1350	1350	1300	1250	1200

Tässä yksinkertaisessa tapauksessa ratkaisu olisi luontevammin perustunut suoraan ha-satovertailuun, mutta monien alueiden ja lukuisten kasvien **vuoksi** sitä on **vaikea** käyttää. Sensijaan säästyneen peltoalan määrä tarjoaa käyttökelpoisen kriterion edullisimpaan sijoittumisratkaisuun pyrittäessä. Tässä yhteydessä on ehkä heti syytä korostaa, ettei tämän kriterion käyttö suinkaan sinänsä sisällä ehdotusta, että peltoa olisi jätettävä viljelemättä. Se tarjoaa vain keinon sijoitusongelman ratkaisulle.

Päämääränä on siis asetetun tuotantotavoitteen täyttäminen mahdollisimman pieneltä peltoalalta, eli jos x_{ij} on pinta-ala, voidaan kirjoittaa

$$(0)\quad \min z_o = \sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6} x_{ij}$$

Merkitsemme ry-satoa c_{ij}:llä. Esitetyt tuotantotavoitteet voidaan kirjoittaa muotoon:

$$(1)\quad \sum_{j=1}^{6} x_{1j}c_{1j} = 390.0 \text{ milj.ry} \qquad \text{(vehnä),}$$

$$(2)\quad \sum_{j=1}^{6} x_{2j}c_{2j} = 200.0 \quad \text{-"-} \qquad \text{(ruis),}$$

$$(3)\quad \sum_{j=1}^{6} x_{3j}c_{3j} = 280.0 \quad \text{-"-} \qquad \text{(ohra),}$$

$$(4)\quad \sum_{j=1}^{6} x_{4j}c_{4j} = 360.0 \quad \text{-"-} \qquad \text{(kaura),}$$

$$(5)\quad \sum_{j=1}^{6} x_{5j}c_{5j} = 203.6 \quad \text{-"-} \qquad \text{(peruna),}$$

$$(6)\quad \sum_{j=1}^{6} x_{6j}c_{6j} = 900.0 \quad \text{-"-} \qquad \text{(heinä).}$$

Edellä esitettyjen vähennysten jälkeen käytettävissä olevan peltopinta-alan asettamat rajoitukset voidaan esittää seuraavasti:

(7) $\sum_{i=1}^{6} x_{i1} \leq 430\ 200 \text{ ha} = Y_1$ (alue I),

(8) $\sum_{i=1}^{6} x_{i2} \leq 470\ 600 \text{ ha} = Y_2$ (alue II),

(9) $\sum_{i=1}^{6} x_{i3} \leq 343\ 600 \text{ ha} = Y_3$ (alue III),

(10) $\sum_{i=1}^{6} x_{i4} \leq 337\ 600 \text{ ha} = Y_4$ (alue IV),

(11) $\sum_{i=1}^{6} x_{i5} \leq 173\ 700 \text{ ha} = Y_5$ (alue V),

(12) $\sum_{i=1}^{6} x_{i6} \leq 48\ 200 \text{ ha} = Y_6$ (alue VI);

Kasvinviljelynäkökohtia silmälläpitäen asetetut pinta-alarajoitukset kullekin kasville kaikilla alueilla ovat epäyhtälön muotoon puettuina seuraavat:

(13-18) $x_{1j} \leq 0.30y_j$,

(19-24) $x_{2j} \leq 0.15y_j$,

(25-30) $x_{3j} \leq 0.13y_j$,

(31-36) $x_{3j}+x_{4j} \leq 0.33y_j$,

(37-42) $x_{5j} \leq 0.15y_j$,

(43-48) $x_{6j} \leq 0.60y_j$, $(j=1,\ldots,6)$, missä yhtälöryhmässä y_j' tarkoittaa kunkin alueen peltopinta-alaa. Alkuasetelma käsittää siten 6 yhtälöä ja 36 epäyhtälöä.

Ratkaisua varten voidaan minimoitava pinta-alayhtälö kirjoittaa muotoon

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}+\ldots\ldots+x_{66} = \sum_{i,j=1}^{6} x_{ij} = (\text{min})$$

Kukin kerroin on siis tässä tapauksessa + 1. Epäyhtälöt (7-49) saadaan yhtälöiksi lisäämällä **vajausmuuttuja** x_v (v = 34, 35,..,75), jonka kerroin on jokaisessa yhtälössä + 1, koska kussakin epäyhtälössä on kysymys ylärajasta. Yhtälöihin (1-6) ei saa merkitä mitään vajausmuuttujaa, koska tuotantotavoitteissa ei sallita ylitystä eikä alitusta. Sen sijaan kuhunkin niistä lisätään alkuratkaisun löytämiseksi apumuuttuja q_j kuten rehuseosprobleemassakin. Yhtälöt (1-6) saavat muodon:

$$\sum_{j=1}^{6} c_{1j}x_{1j}+1q_1+0q_2+0q_3+0q_4+0q_5+0q_6 = Q_1 = 200,$$

$$\sum_{j=1}^{6} c_{2j}x_{2j}+0q_1+1q_2+0q_3+0q_4+\ldots\ldots\ldots= Q_2 = 280.$$

Yleisesti merkittynä:

$$\sum_{j=1}^{6} c_{vj}x_{vj}+0q_1+0q_2+\ldots+1q_v+0q_{v+1}+\ldots= Q_v \quad (v=1,2,\ldots,6).$$

Yhtälöt (7-49) saavat muodon:

$$\sum_{j=1}^{6} x_{1j}+1x_{34}+0x_{35}+0x_{36}+\ldots+0x_{75} = 430\ 200,$$

$$\sum_{j=1}^{6} x_{2j}+0x_{34}+1x_{35}+0x_{36}+\ldots+0x_{75} = 470\ 600.$$

Yleisessä muodossa:

$$\sum_{j=1}^{6} x_{ij}+0x_{34}+0x_{35}+\ldots+1x_k+0x_{k+1}+\ldots = y_k,$$

jossa y_k käy läpi kaikki pinta-alarajoitukset ja jossa x_k on vastaava vajausmuuttuja.

Eräs ratkaisu tälle yhtälöryhmälle on seuraava:

$x_{ij} = 0 \qquad (i,j = 1, 2,\ldots,6)$

$x_k = y_k$

$q_v = Q_v$

Minimoitava yhtälö on nyt: $\sum_{i,j=1}^{6} x_{ij}+q_k = (\min)$ $(k=1,\ldots,6,$ $v=34,\ldots,75)$.

Yhtälöiden kertoimet merkitään nyt normaaliin simplex-taulukon muotoon ja järjestetään ne esim. taulukossa 19 esitetyllä tavalla: ensin vajausmuuttujat, sitten todelliset muuttujat ja lopuksi apumuuttujat. Taulukon B-sarakkeeseen tulevat yhtälöiden oikean puolen vakiot. Kaikkein ylimmäiseksi on merkitty G_x-rivi, joka muodostuu tässä tapauksessa ykkösistä, x_{ij}:n kertoimista todelliset muuttujat-sarakkeiden kohdalla ja apumuuttujat-sarakkeiden kohdalla m:stä. Ratkaisu etenee tämän jälkeen edellä jo selostettua m-tekniikkaa käyttäen, joten ulosmenorivin löytämiseksi on laskettava 2 Z-G riviä. Z_x-rivi sisältää kuten edellisissäkin esimerkeissä vain nollia. Z_m-rivi saadaan kertomalla kukin Q_v-rivi m:llä ja laskemalla saadut tulot sarakkeittain yhteen. $Z-G_x$-rivi lasketaan seur.: Z_x-rivin alkiosta vähennetään vastaava G_x-alkio. Ja vastaavasti $X-G_m$:n rivi saadaan vähentämällä kustakin Z_m-alkiosta vastaava G_m-alkio.

Ratkaisun alkuvaiheessa pannaan paino $Z-G_m$-rivin saamiseksi 0:ksi taikka negatiiviseksi, koska kysymys on minimoimisesta. Ulosmenosarakkeen määrää siis se $Z-G_m$alkio, joka on suurin. Ratkaisua jatketaan nyt tavanomaisen simplex-menetelmän mukaan. Ulosmenoalkio löydetään jakamalla B-sarake ulosmenosarakkeella. Tulokset merkitään sarakkeeseen R. Pienin positiivinen osamäärä määrää ulosmenotapin ja -rivin. Z-G_m-rivi voidaan uusissa ratkaisuissa laskea kuten muutkin rivit. Ratkaisua jatketaan kunnes kaikki Z-G_m-alkiot $\geqq 0$. Jos tällöin jää sellaisia positiivisia Z-G_x-alkioita, joiden vastaavat Z-G_m-alkiot ovat = 0, parannetaan niiden kohdalta vielä ratkaisua. Lopullinen ratkaisu, johon on liitetty perunan, heinän, ym. perusvaatimukset, ilmenee taulukosta 20.

Vaikka suoritettu laskelma ja sen tulokset onkin käsitettävä täysin esimerkkiluontoisiksi, voitaneen lopputulosta tietyllä mielenkiinnolla verrata vastaavaan todelliseen viljelykasvien sijoittumiseen esim. vuonna 1960. Tämä jakautuma on vertailun helpottamiseksi esitetty taulukossa 20 sulkumerkein varustetuilla numeroilla.

Taulukosta voidaan todeta, että ratkaisun mukaan olisi I alueella ollut satojen suhteellisen suuruuden perusteella edullisempaa laajentaa vehnän, rukiin ja ohran viljelyä ja supistaa erityisesti kauran ja myös perunan ja heinän pinta-aloja. Alueella II ovat ratkaisun mukaiset vehnän ja rukiin pinta-alat suuremmat, ohra yhtä suuri, kaura, heinä sekä peruna pienemmät kuin todellisuudessa. Alueella III olisi ratkaisun perusteella edullista lisätä rukiin ja heinän viljelyä lähinnä kauran ja perunan kustannuksella. Alueelle IV ei ratkaisu suosittele vehnää lainkaan ja ruistakin vain rajoitetusti. Myös ohra- ja kaura-ala on ratkaisussa pienempi kun sensijaan perunan viljely näyttää tälle alueelle satovertailun perusteella erityisen sopivalta. Alueilla V ja VI viljelyn pääpaino on heinällä. Kun alueet IV, V ja VI ovat sadoiltaan heikoimpia on niiden pinta-alasta jäänyt osa käyttämättä tuotantotavoitteiden tultua täytetyksi. Tätä tulosta on luonnollisesti pidettävä seurauksena käsitellyssä esimerkissä asetetuista tuotantorajoituksista pelkästään satojen suhteellisen suuruuden perusteella suoritetussa ratkaisussa, eikä sitä missään tapauksessa saa tulkita taloudelliseksi laskelmaksi, jossa päädytään suosittelemaan peltomaan käyttämättä jättämistä tietyillä alueilla.

Taulukko 19. Kantaohjelman kaavio kasvinviljelytuotannon sijoitusproblemin ratkaisussa.

				C_x	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
								Alue I								
C_s			Prosessin taso	B	Vajausmuuttujat										Todelliset	
					P_{34}	P_{35}	P_{36}	P_{67}	P_{68}	P_{69}	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
m	Vehnä	Q_1	390 000 000								1450					
m	Ruis	Q_2	200 000 000									1350				
m	Ohra	Q_3	280 000 000										1750			
m	Kaura	Q_4	360 000 000											1500		
m	Peruna	Q_5	203 600 000												2500	
m	Heinä	Q_6	900 000 000													1350
0	Alue I	P_{34}	430 200		1						1	1	1	1	1	1
0	II	P_{35}	470 600			1										
0	III	P_{36}	343 600				1									
0	IV	P_{37}	337 600													
0	V	P_{38}	173 700													
0	VI	P_{39}	48 200													
0	Peruna I	P_{64}	64 530												1	
0	II	P_{65}	70 590													
0	III	P_{66}	51 540													
0	IV	P_{67}	50 640					1								
0	V	P_{68}	26 055						1							
0	VI	P_{69}	7 230							1						
		Z			0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		Z^x			0	0	0	0	0	0	1450	1350	1750	1500	2500	1350
		$Z-G^m$			0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1
		$Z-G^x_m$			0	0	0	0	0	0	1450	1350	1750	1500	2500	1350

l	l	l	l	l	l	m	m	m	m	m	m		
Alue III													
muuttujat						Apumuuttujat							
P_{13}	P_{14}	P_{15}	P_{16}	P_{17}	P_{18}	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6	R	
1250						1							ry-tarve
	1300						1						
		1350						1					
			1200						1				
				2900						1		70 200	
					1350						1		
1	1	1	1	1	1							343 600	pinta-alaraj. kullekin alueelle
				1								51 540	pinta-alaraj. perunalle kullakin alueella
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
1250	1300	1350	1200	2900	1350	1	1	1	1	1	1		
-1	-1	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	0		
1250	1300	1350	1200	2900	1350								

Taulukko 20. Kasvinviljelytuotannon sijoitusprobleemin lopullisen ratkaisun mukaiset pinta-alat ja vastaavat todelliset viljelyalat v. 1960 (suluissa) 1000 ha.

	I	II	III	IV	V	VI	Yht.
Vehnä	129.1 (109.6)	141.8 (43.3)	15.5 (16.2)	- (10.5)	- (1.0)	- -	286.4 (180.6)
Ruis	64.5 (19.5)	38.3 (29.8)	42.9 (23.7)	6.3 (30.9)	- (6.8)	- -	152.0 (110.7)
Ohra	55.9 (32.3)	61.2 (57.2)	44.7 (47.7)	20.0 (38.4)	- (29.6)	- (7.4)	181.8 (212.6)
Kaura	86.0 (148.8)	94.1 (161.4)	68.7 (85.1)	15.2 (72.2)	- (22.3)	- (0.6)	264.0 (490.4)
Peruna	9.4 (17.1)	10.3 (23.1)	7.5 (18.4)	58.0 (19.0)	23.7 (7.0)	1.1 (1.9)	110.0 (86.5)
Heinä, laidun ym.	283.1 (301.8)	341.1 (374.2)	322.3 (310.5)	316.7 (322.8)	163.0 (192.1)	45.1 (62.7)	1471.3 (1564.1)
Käyttämättä	-	-	-	76.7	66.9	24.1	167.7
Yht.	628.0	686.8	501.6	492.9	253.6	70.3	2632.2

6. Lineaarisen ohjelmoinnin käyttömahdollisuuksien tarkastelua.

Edellä on esitetty muutamien tyypillisten esimerkkien avulla lineaarisen ohjelmoinnin tekniikkaa. Kysymys on ollut itse menetelmästä ja sen käyttöä koskevista sovellutuksista, jotka on tarkoitettu avuksi niille, jotka menetelmää syvällisemmin tuntematta tarvitsisivat ja voisivat sitä hyödyllisesti käyttää erilaisten tutkimusten yhteydessä. Sen vuoksi on syytä vielä korostaa, että kysymyksessä ovat olleet vain esimerkit, eikä lopputuloksilla siten sellaisenaan ole käyttöarvoa.

Lopuksi on syytä lyhyesti tarkastella lineaarisen ohjelmoinnin käyttömahdollisuuksia ja sen käyttöön liittyviä vaikeuksia nimenomaan Suomen olosuhteita silmällä pitäen. Tähän on sitäkin enemmän aihetta, koska kysymyksessä on menetelmä, joka näyttää saaneen monessa maassa varsin tuntuvan sijan maatalouden alalla tapahtuvassa tutkimus-, opetus- ja neuvontatyössä. Näin on asian laita ennen muuta menetelmän synnyinmaassa Yhdysvalloissa. EISGRUBERin ja REICHin (1961, s.303-307) suorittaman tutkimuksen mukaan on vuonna 1960 Yhdysvaltain 47:stä osavaltioiden maatalouskorkeakoulusta 41 käyttänyt lineaarista ohjelmointia tutkimustyössä. Samalla 43 näistä opetti lineaarista ohjelmointia joko sitä varten järjestetyillä erikoiskursseilla tai jonkun muun kysymyksessä olevan alan kurssin osana. 14 korkeakoulua käytti lineaarista ohjelmointia lisäksi neuvontatyössä muodossa tai toisessa.

Arvioitaessa lineaarisen ohjelmoinnin käyttömahdollisuuksia ja sen avulla saatujen tulosten käyttökelpoisuutta on todettava, että lopputulos on erityisesti neljästä seikasta riippuvainen. Ensimmäisenä tärkeänä tekijänä ovat kulloinkin olemassa olevat ja laskelmissa huomioon otettavat tuotantomahdollisuudet (vaihtoehdot). Toiseksi ovat tulosten kannalta ratkaisevia suunnittelun yhteydessä tuotantovälineiden käytölle asetettavat rajoitukset. Kolmanneksi vaikuttavat tulokseen olennaisesti kussakin yksityistapauksessa vallitsevat, eri tuotannonhaaroja koskevat panos-tuotos-suhteet. Neljäntenä herkästi vaikuttavana tekijänä ovat hinnat ja hintasuhteissa tapahtuvat muutokset.

Edellä esitettyjä tekijöitä lähemmin tarkasteltaessa on todettava, että perusaineiston puuttuessa ja laskuteknillisten vaikeuksien vuoksi ei voida koskaan ottaa huomioon kaikkia eri vaihtoehtoja, jotka saattaisivat tulla kysymykseen, ja tulos on siten aina rajoitettu niihin edellytyksiin, jotka kulloinkin on valittu. Tämä käy selvästi ilmi kaikistakin edellä esitetyistä esimerkeistä, jos niitä pitemmälle analysoidaan ja mm. selvitetään, mitä muutoksia asetettujen vaihtoehtojen tai rajoitusten muuttaminen kulloinkin aiheuttaa.

Nimenomaan varsinaisen maataloustuotannon alalla näyttää ilmeiseltä, että meillä useat tekijät aiheuttavat enemmän vaikeuksia lineaarista ohjelmointia käytettäessä kuin esimerkiksi Yhdysvalloissa. Niinpä meillä on sääntönä tuotannon suurempi monipuolisuus kuin Yhdysvalloissa, jossa monilla tiloilla tulee kysymykseen kenties vain pari, kolme tuotannonhaaraa. Monien keskeisten tuotantovälineiden käytössä ei meillä myöskään useinkaan voida asettaa niin selviä rajoja ja rajoituksia kuin menetelmä periaatteessa edellyttää. On hyvin ymmärrettävää, että Yhdysvalloissa esimerkiksi juuri työnmenekki ja sen suurin mahdollinen käytettävissä oleva määrä voidaan paremmin todellisuutta vastaavasti todeta, koska tilapäistyövoiman saanti monilla seuduilla ja monina aikoina vuodesta on käytännössä mahdotonta. Meillä sen sijaan ehdottoman rajan vetäminen tässä suhteessa on hyvinkin kysymyksen alaista. Sama pätee tietyssä määrin myös moniin muihin tuotantovälineisiin. Luonnollisesti ilmenevät nämä vaikeudet erityisen suurina siirryttäessä yksityisen tilan puitteissa käsittelemään alueellisia ongelmia. Tällaisissa tehtävissä näyttää realististen rajoitusten asettaminen suorastaan ylivoimaiselta.

Suurimpana käytännöllisenä vaikeutena maataloustuotantoa koskevissa sovellutuksissa on kuitenkin epäilemättä se, että ei ole saatavissa riittävästi sellaisia teknillisiä tietoja, joiden perusteella voitaisiin saada luotettavat ja kuhunkin tapaukseen sopivat panos-tuotos-suhteet ja niissä eri syistä tapahtuvat muutokset selvitetyiksi. Teknillisiä tietoja panos-tuotos-suhteista on jo sellaisenaan riittämättömästi, ja lisäksi tiedot monessa tapauksessa rajoittuvat keskiarvoihin, jolloin niiden perusteella ei voida eritellä ja selvittää rajatuotto-ajattelun edellyttämää panos-tuotos-suhteen muuttumista mm. eri intensiteettitasoissa. Toisaalta on kuitenkin huomattava, että maatalouteen liittyy myös lukuisia sellaisia puhtaasti teknillisluontoisia kysymyksiä, joissa edellä kuvattua panos-tuotos-suhteen määrittelyvaikeutta ei ilmene. Esimerkkinä tällaisista tehtävistä on mm. tässä tutkimuksessa käsitelty rehuseosprobleemi. Tämän tyyppisiin ratkaisuihin on lineaarinen ohjelmointi ilmeisesti varsin sopiva menetelmä.

Tässä yhteydessä on syytä erikseen tarkastella niitä vaikeuksia, jotka johtuvat siitä, että yrittäjän henkilökohtainen panos on vaikeasti mitattavissa. Kuitenkin juuri sillä on olennainen vaikutus tuotannon järjestämiseen ja niin muodoin myös panos-tuotos-suhteisiin. Kun tämä yrittäjän vaikutus voi ilmetä monia eri teitä, kuten satojen suuruutena, panos-tuotos-suhteen muodostumisessa kotieläintaloudessa, tuotteiden laadussa ja markkinoinnissa ja sitä tietä erilaisissa yksikköhinnoissa jne., on toisaalta vaikea erottaa yrittäjän vaikutusta erikseen, kun taas toisaalta on vaara, että se tulee eri yhteyksissä otetuksi huomioon useampaankin kertaan. Mainitut vaikeudet kuvastuvat jo siinä, minkälaiseksi tulevaisuutta koskevissa laskelmissa olisi mm. tietyn kasvin satotaso katsottava ja millä tavalla tämän satotason on laskettava muuttuvan tuotantovälinepanosta muutettaessa, mikä on eri viljakasvien satojen keskinäinen suhde kussakin tapauksessa jne. Suhteellisen pienetkin eroavuudet saattavat merkitä huomattavan paljon laskelman lopputulokseen, varsinkin kun muistetaan, että lineaarinen ohjelmointi antaa matemaattisen tarkan vastauksen juuri niiden lukujen perusteella, joita laskelmassa on käytetty. Tämän vastauksen merkitsevyys ei kuitenkaan voi olla suurempi kuin sen perustana olevien alkutietojen merkitsevyys ja tarkkuus. Sen vuoksi lineaarisen ohjelmoinnin käyttö edellyttää ensi sijassa asianomaisen tuotantotekniikan ja yleensä ko. ammattialan perusteellista hallintaa, jotta probleemin asettelu ja sen ratkaisemiseksi tarvittavat tiedot mahdollisimman hyvin vastaavat todellisuutta. Näiden perusteella tapahtunut ongelman ratkaisu on sen sijaan pelkkä teknillinen laskutoimitus ja siten luonteeltaan vähemmän vaativa. Toisaalta on myös saatujen tulosten arvostelu suoritettava asiantuntemuksella, sillä on otettava huomioon, että ratkaisu - optimivaihtoehto - on itse asiassa laskutoimitusten antama "sokea" tulos, joka pätee nimenomaan niillä edellytyksillä, joiden varaan suunnittelu on rakennettu.

Hinnoissa ja hintasuhteissa esiintyvää vaihtelua voidaan tietyssä määrin ottaa huomioon lineaarisessa ohjelmoinnissa, kuten mm. edellä esitetyn ns. muunnetun simplexmenetelmän yhteydessä on tehty, jolloin saadaan selvitetyksi optimitulos ja sen muuttuminen siinä tapauksessa, että yhtä tai useampiakin tuotannontekijöitä koskevia rajoituksia muutetaan. Tällöin voidaan laskea esim. hintasuhteiden muutosten vaikutus siten, että ratkaistaan edullisin tuotantosuunnitelma tietyissä hintasuhteissa ja samalla saadaan vastaus kysymykseen, kuinka suuri hinnanmuutos aiheuttaa jonkin muun suunnitelman tulemisen edullisemmaksi. Nämä mahdollisuudet ovat tietysti omiaan lisäämään lineaarisen ohjelmoinnin käyttökelpoisuutta, mutta samalla ne kuitenkin lisäävät myös laskentatyötä ratkaisujen yhteydessä.

Normaalimuodossaan ei lineaarinen ohjelmointi myöskään ota huomioon riskin ja yleensä epävarmuustekijöiden merkitystä. Tässäkin suhteessa on menetelmää kuitenkin pyritty kehittämään ja on mahdollista ratkaisuun liittää tätä koskevat lisäselvitykset. Riski voidaan suunnitelmissa ottaa yksinkertaisesti huomioon siten, että etukäteen päätetään esim. tietyn vähimmäiskarjamäärän sisällyttämisestä tuotantosuunnitelmaan taikka sellaisen rajoituksen asettamisesta, että jotakin suhteellisen epävarmaa, vaikka tuottoisaa kasvia ei saa sisältyä suunnitelmaan tiettyä määrää enempää jne. Tällaiset rajoitukset voidaan sisällyttää kiinteästi tavalliseen yksinkertaiseen laskelmaan. Toinen ja yleispätevämpi, joskin samalla ylimalkaisempi keino on suorittaa varsinainen riskilaskelma ohjelmoinnin yhteydessä, jolloin asetetaan tavoitteeksi, että lopullisen suunnitelman täytyy täyttää edellytys, että varianssi - johtuu se sitten satovaihteluista, markkinatilanteen vaihteluista tai mistä muusta tekijästä hyvänsä - minimoidaan tai saadaan riittävän pieneksi. On kuitenkin huomattava, että käytettävissä on toistaiseksi perin vähän perusaineistoa tämänkaltaisia laskelmia varten.

Edellä sanottu ei kuitenkaan tarkoita sitä, että lineaarisella ohjelmoinnilla ei meillä olisi merkitystä ja käyttömahdollisuuksia. On nimittäin todettava, että kutakuinkin <u>kaikki ne ongelmat ja puutteellisuudet, jotka siihen liittyvät ja joihin edellä on viitattu, tulevat samojen kysymysten ratkaisussa joka tapauksessa esille, käytetäänpä lineaarisen ohjelmoinnin sijasta mitä muuta menetelmää hyvänsä</u>. Lineaarinen ohjelmointi ei merkitsekään asiallisesti mitään sellaista uutta teoriaa, jota ei nimenomaan talouden alalla jo ennestään olisi tunnettu ja käytetty, mutta se merkitsee paljon monipuolisempaa ja täydellisempää probleemin käsittelymahdollisuutta kuin aikaisempi ja edelleenkin käytössä oleva ns. budjettimenetelmä, jota mm. tavanomaisessa taloussuunnitelmien teossa itse asiassa käytetään. Voidaankin sanoa, että mitä enemmän vaihtoehtoja tuotantovälineiden käytölle on olemassa ja mitä isommasta probleemista on kysymys, sitä suurempi hyöty lineaarisesta ohjelmoinnista tavalliseen budjettimenetelmään ja yleensä muihin menetelmiin verrattuna saadaan. Niinikään on huomattava, että tutkimustyön edistyessä lisääntyvät samalla myös lineaarisen ohjelmoinnin käyttömahdollisuudet, kun saadaan käytettäväksi enemmän ja yksityiskohtaisempia perustietoja lineaarisen ohjelmoinnin pohjaksi.

Summary

On the use of linear programming in agriculture.

The purpose of this study is to present, in the light of some typical examples, the techniques of linear programming and to provide Finnish students with sufficient minimum information to enable them to consider the possibilities of using linear programming methods and to apply this method in their studies. This type of simplified presentation is considered advisable because a practical approach to the type of agricultural problems where linear programming methods have proved to be most succesful does not seem to necessitate a thorough knowledge of the method's mathematical background.

A farm management problem is chosen as the first example. A planning situation with four alternative crops is considered on a farm with limited hectarage and labor supply to illustrate the use of the simplex-method, first in a constant price situation, and then further modified to a one-price-variable problem.

Secondly, a minimum cost dairy feed mixture problem is presented to provide an example of the use of simplex-techniques for solving minimization problems. This has been derived from a field where linear programming has, in practice, been used to relatively large extent, especially in the United States.

The third example illustrates the stepping-stone method that can be used in solving transportation problems. A cooperative marketing organization with an extensive chain of local coops both in production areas and consuming centers has to minimize the transportation cost in marketing

potatoes. In the basic feasible solution the use of both inspection- and modi-method are presented.

Finally, an allocation problem is presented where optimum location for producing hypothetical national requirements of the main crops is determined for different agricultural areas on the basis of relative level of yields per hectare in each area. Simplex-method is used with various short-cuts for observing necessary rotation practicies.

In the light of the four examples an evaluation of the method is offered. The practical value of the mathematically exact results obtained from linear programming calculations seems to de dependent especially on four factors. First its value depends on the extent to which the existing alternative lines of production are considered in the solution. Secondly, the restrictions set, a priori, for the use of various input factors are of great importance. The third influencing factor is the reliability of input-output relationships used in each line of production. Fourthly, the degree of correctness in price expectations is decisive to the value of the results.

When considering these factors it is noted that, due to the lack of basic data and technical difficulties in calculations, it is hardly ever possible to include all important existing alternatives in the solution. The importance of this omission becomes evident in all the examples given when they are more closely analysed by considering the changes that additions in alternative production lines or changes in restrictions may bring about.

It is noted that there are more factors inherent in Finnish agriculture than, e.g., in the United States agriculture that cause difficulties in practical application of the method. For example, the great diversification in production typical in Finnish agriculture, because of weather risks and other factors, has to be mentioned in this respect. Neither does it seem practicable here to set such strict restrictions for inputs, (e.g. labor supply), which, in principal, are necessary for the use of this method. Naturally, these difficulties become all the more insurmountable when programming is extended from individual farms to regional solutions.

The major practical difficulties in application to agricultural pruduction arise, however, from the lack of consistent input-output data. Available knowledge of these technical relationships is at the best limited to averages which do not provide for proper consideration of changes that occure at different production intensity levels.

In this connection the entrepreneur's personal capacity deserves special attention. This input, which is very difficult to measure, affects the production plan in many ways since it has varying influence on different economic pursuits, e.g. yields of various plants, input-output relationships in animal production, quality of the produce, marketing results, etc.

On the other hand, it should be noted, that in the broad field of agriculture there are numerous, purely technical tasks (e.g. the mixture problem) where the input-output ratios do not play any decisive role and where, therefore, the linear programming method has been succesfully applied.

With respect to price uncertainty, it is pointed out that it is possible to consider the effect of price variation, to some extent, by modified linear programming procedures. However, calculation of the changes caused by a relevant number of price relationships tends to increase greatly the calculational burden. In the programming procedures the same considerations are, in principal, valid in observing risk factors generally.

In concluding it is stressed, however, that the presentation of the great difficulties in the applications of linear programming is not meant as a nullification of the method's practical value and usability. While criticizing the method, it must always be remembered, that practically all defects and shortcomings that can be referred to linear programming are valid, whatever the procedure used in solving the same problems. This is only natural, since linear programming is not a new theory in economics, but is a tool which offers new possibilities for systematic handling of calculational tasks. It seems evident that the more extensive the problem is, the greater the relative benefit of linear programming becomes when compared to the traditional methods. When progress in research work brings about more accurate results that can be used as a basis for linear programming, then the benefits of the exact solutions that the method offers will also increase in value.

Kirjallisuutta.

BOLES, JAMES N. 1955. Linear programming and farm management analysis. Journal of Farm Economics, Vol.37, Febr. 1955, s.1-24.

BOWLEN, BERNARD ja HEADY, Earl O. 1955. Optimum combinations of competitive crops. Iowa Agr.Exp.Sta. Bul. 426, 1955, s.374-400.

CHARNES, A., COOPER, W.W. ja HENDERSON, A. 1953. An introduction to linear programming. John Wiley and Sons. Inc., New York 1953, 74 s.

DANTZIG, G.B. 1951. Maximization of a linear funktion of variables subject to linear inequalities. Activity analysis of production and allocation. John Wiley and Sons, Inc., New York 1951, s.339-347.

DORFMAN, R., SAMUELSON, P.A. ja SOLOW, R.M. 1958. Linear programming and economic analysis. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York 1958, 527 s.

EISGRUBER LUDWIG M. ja REISCH E. 1961. A note on the application of linear programming by agricultural economics departments of land grant colleges. Journal of Farm Economics, Vol. 43, May 1961, s.303-307.

FISCHER, W.D. ja SCHRUBEN, L.W. 1953. Linear programming applied to feed mixing under different price conditions. Journal of Farm Economics, Vol. 35, Nov. 1953, s.471-483.

HEADY, EARL O. ja CANDLER, W. 1958. Linear programming methods. The Iowa State College Press, Ames, Iowa, USA. 1958, VII + 597 s.

HITCHOCK, F.L. 1941. The distribution of a product from several sources to numerous localities. Journal of Mathematics and Physics, Vol. 20, 1941, s.217-227.

HUTTON, R.F., ALLISON, J.R. 1957. A linear programming model for development of feed formulas under mill-operating conditions. Journal of Farm Economics. Vol. 39, Febr., 1957, s. 94-111.

RENBORG, Ulf, 1957. Lineär planering (linear programming) använd i lantbruksekonomiska driftsplaneringsproblem. Meddelande från jordbrukets utredningsinstitut 3-57, 61.s.

SWANSON, E.R. 1955. Solving minimum-cost feed mix problems. Journal of Farm Economics. Vol. 37, Febr. 1955, s.135-139.

VARTIAINEN, HENRI J. 1960. Lineaarisesta ohjelmoinnista ja simplex-menetelmästä. Liiketaloudellinen aikakauskirja 3/1960, s.290-307.

WAUGH, F.V. 1951. The minimum cost dairy feed. Journal of Farm Economics. Vol. 33, Aug. 1951, s. 299-310.

Esitetyissä lineaarisen ohjelmoinnin sovellutuksissa käytettyä sanastoa.

active	aktivoitu
activity analysis	aktiviteettianalyysi
" level, prosess level	toiminnantaso, prosessin taso
admissible basis	käypä kanta
additivity	yhteenlaskettavuus
artificial activities	apumuuttujat
basic feasible solution	käypä, mahdollinen kantaohjelma
basic inequalities	kantaepäyhtälöt
constraint equalities	rajoittavat yhtälöt
cycling	kierto
degeneracy	moniratkaisuisuus
disposal activities, vectors, variables	vajausmuuttujat, -vektorit
dividibility	jaettavuus
dummy destination	apualue
finitness	äärellisyys
inactive	aktivoimaton
incoming column	sisääntulosarake
" pivot	sisääntulotappi
" row	sisääntulorivi
input-output	panos-tuotos
inspection method	tarkastelumenetelmä
least-cost mix	minimikustannusyhdistelmä
linear programming	lineaarinen ohjelmointi
linearity	lineaarisuus, suoraviivaisuus
MODI-method	MODI-menetelmä
one-price-variable programming	kiinteähintainen ohjelmointi

outgoing column	ulosmenosarake
" pivot	" tappi
" row	" rivi
pseudo-path	valepolku
real activities, vectors, variables	todelliset muuttujat, vektorit
revised simplex-method	muunnettu simplex-menetelmä
self-contained path	suljettu polku
shadow price	varjohinta
single-value expectations	lähtöarvojen ehdottomuus, yksikäsitteisyys
stepping-stone method	porrasmenetelmä
variable price programming	muuttuvahintainen ohjelmointi