METSÄNTUTKIMUSLAITOKSEN TIEDONANTOJA 895, 2003

Normaalimetsän optimaalisuudesta

Esa-Jussi Viitala

VANTAAN TUTKIMUSKESKUS

METLA

METSÄNTUTKIMUSLAITOKSEN TIEDONANTOJA 895, 2003

Normaalimetsän optimaalisuudesta

Esa-Jussi Viitala

VANTAAN TUTKIMUSKESKUS

Esa-Jussi Viitala 2003. Normaalimetsän optimaalisuudesta. Metsäntutkimuslaitoksen tiedonantoja 895. 59 s. 10 €. ISBN 951-40-1883-4.

Metsäekonominen tutkimus on perinteisesti keskittynyt optimoimaan metsänkäsittelyä metsikkötasolla. Tällöin on oletettu, että Fisherin separaatioteoreema on voimassa eikä yksittäisten metsiköiden käsittelyiden välillä ole yhteyttä. Todellisuudessa metsään liittyvät ympäristöarvostukset, epätäydelliset pääomamarkkinat, epävarmuus ja metsänkäsittelyn skaalavaikutukset voivat kuitenkin aiheuttaa sen, ettei yksittäisten metsiköiden käsittelyä koskevien ratkaisujen seurauksena päästä tehokkaaseen lopputulokseen metsälön tai päätöksentekijän koko talouden kannalta.

Metsäsuunnittelussa metsikkötason analyysin puutteisiin on pyritty vastaamaan ottamalla tavoitteeksi puuston tasainen ikäluokkajakauma eli ns. normaalimetsä. Sen optimaalisuus on kuitenkin yleensä oletettu ilman analyyttisia tarkasteluja. Jotta normaalimetsää voitaisiin pitää talousteoreettisesti perusteltuna tavoitteena, pitäisi pystyä osoittamaan, että se on pitkän aikavälin tasapaino ja että päätöksentekijän kannattaa soveltaa sellaista hakkuupolitiikkaa, joka johtaa metsän ikäluokkarakenteen konvergoitumiseen ajan kuluessa normaalimetsään – olipa metsän alkuperäinen ikäluokkarakenne mikä tahansa.

Tässä tutkimuksessa esitetään normaalimetsän optimaalisuuteen liittyviä keskeisiä talousteoreettisia tutkimuksia systemaattisesti ja analyyttisesti. Lisäksi muotoillaan ja ratkaistaan päätöksentekijän hyödyn maksimointiin perustuva diskreettiaikainen optimikiertoaikamalli, joka sisältää metsän ikäluokkadynamiikan, kulutus- ja säästämispäätökset sekä metsään liittyvät ympäristöarvostukset. Tällaista mallia ei ole taloustieteellisessä tai metsäekonomisessa kirjallisuudessa tiettävästi aikaisemmin esitetty.

Päätöksentekijän hyödyn maksimointiin perustuvalla diskreettiaikaisella ikäluokkamallilla tutkitaan normaalimetsän optimaalisuutta kolmessa eri tapauksessa. Ensimmäisessä tapauksessa metsään ei liity lainkaan ympäristöarvostuksia. Tällöin hakkuu- ja tuotantopäätökset tehdään preferensseistä riippumatta eli Fisherin separaatioteoreema on voimassa, metsää hakataan Faustmannin ehdon mukaisesti eikä metsän alkuperäistä ikäluokkajakaumaa kannata ryhtyä muuttamaan. Toisessa tapauksessa ympäristöhyötyjä oletetaan saatavan vain metsän vanhimmasta ikäluokasta ("vanhasta metsästä"). Tällöin syklinen ratkaisu normaalimetsän ympärillä on mahdollinen. Kolmannessa ja ehkä realistisimmassa tapauksessa ympäristöhyötyjä saadaan metsän kahdesta vanhimmasta ikäluokasta, vanhimmasta eniten. Tällöin normaalimetsä osoittautuu pitkän aikavälin optimiratkaisuksi, jos metsämaata kannattaa allokoida "vanhan metsän" kasvattamiseen.

Jatkossa metsän ikäluokkamalleja olisi tarpeen laajentaa siten, että niihin pystyttäisiin sisällyttämään epätäydelliset pääomamarkkinat ja epävarmuus. Myös harvennushakkuut sekä epälineaariset metsänuudistamis- ja hakkuukustannukset olisi tärkeä ottaa huomioon, koska esimerkiksi Suomessa yli puolet vuotuisesta hakkuumäärästä saadaan harvennushakkuista. Ikäluokkamallien realistisuutta edistäisi myös se, jos niissä pystyttäisiin ottamaan huomioon metsiköiden tilajärjestys, koska yksittäisen metsikön arvostus ympäristöllisessä mielessä voi riippua suuresti läheisten metsiköiden ominaisuuksista.

Myös metsäsuunnittelumalleja tulisi jatkossa kehittää ikäluokkamallien pohjalta siten, että puun hinta olisi endogeeninen muuttuja. Tällöin malleissa ei enää tarvitsisi käyttää talousteoreettisesti keinotekoisia rajoitteita hakkuiden tasaisuuden varmistamiseksi. Tämä muodostaisi vahvan teoreettisen perustan myös puun tarjonnan ja taloudellisen kestävyyden analysoinnille.

Julkaisija:

METLA, Vantaan tutkimuskeskus. Hanke 3318.
Hyväksytty 27.05.2003, Kari Mielikäinen, tutkimusjohtaja.

Tilaukset:

Metsäntutkimuslaitos, kirjasto, PL 18, 01301 Vantaa.
Puhelin: 010 211 2200, Faksi: 010 211 2201
Sähköposti: kirjasto@metla.fi

Kirjoittajan yhteystiedot:

Esa-Jussi Viitala, Metsäntutkimuslaitos, Vantaan tutkimuskeskus, Helsingin toimipaikka, Unioninkatu 40 A, 00170 Helsinki. Puhelin: 010 211 2231, sähköposti: esa-jussi.viitala@metla.fi.

Painopaikka:

Vammalan Kirjapaino Oy 2003.

Esipuhe

Tämä tutkimus on tehty Metsäntutkimuslaitoksen hankkeessa ”Taloudellis-ekologiset vuorovaikutukset metsävarojen kestävässä käytössä”.

Tutkimuksen ohjaajina toimivat professori Olli Tahvonen Metsäntutkimuslaitoksesta ja professori Erkki Koskela Helsingin yliopiston kansantaloustieteen laitokselta. Heille esitän parhaat kiitokseni. Erityisen keskeisellä sijalla tutkimuksen toteuttamisessa olivat Olli Tahvosen ideat ja neuvot. Kiitän lämpimästi myös muita tutkimuksen syntymiseen myötävaikuttaneita henkilöitä, joista haluan erityisesti mainita MMM Jussi Leppäsen. Kiitos kuuluu myös niille lukuisille suomalaisille metsätieteilijöille, kuten P.W. Hannikaiselle, Bernhard Ericssonille ja Erik Lönnrothille, jotka aikanaan kirjoittivat ansiokkaasti metsätalouden järjestelystä. Heidän tekemiään polkuja oli helppo seurata.

Helsingissä toukokuussa 2003

Esa-Jussi Viitala

Sisällys

1 JOHDANTO

Yksittäinen metsänomistaja voi optimoida metsiensä käsittelyä metsikkötasolla, metsälötasolla tai ottaen huomioon koko taloutensa. *Metsikkö* koostuu yhdestä puustosta, kun taas *metsälöllä* tarkoitetaan kaikkia taloudenpitäjän omistamia metsiköitä. Metsikkötason optimointi perustuu niin sanottuun Faustmannin (1849) malliin, jossa on kyse metsänkasvatuksesta saatavan nettonykyarvon (voiton) maksimoinnista äärettömällä aikahorisontilla.

Metsikkötason optimointi, Faustmannin malli ja nettonykyarvon samaistaminen hyötyyn rakentuvat paljolti Fisherin separaatioteoreeman varaan. Viime vuosina tehdyissä teoreettisissa ja empiirisissä tutkimuksissa on kuitenkin osoitettu, että epävarmuuden, epätäydellisten pääomamarkkinoiden ja metsään liittyvien ympäristö- ja tunnearvostusten (*in situ* -arvostusten) huomioon ottamisen seurauksena Fisherin separaatioteoreema ei välttämättä pidä paikkaansa.

Esimerkiksi epätäydellisten pääomamarkkinoiden oloissa metsänomistaja ei maksimoikaan voittoaan, vaan käyttää metsäänsä ikään kuin pankkina ja myy puuta silloin, kun on aika tehdä jokin huomattava investointi tai kulutuspäätös, kuten ostaa asunto tai auto. Jos omistaja pyrkisi ainoastaan mahdollisimman suureen voittoon, hänen kannattaisi hakata metsä heti sen saavutettua taloudellisesti edullisimman hakkuuiän eikä sitoa hakkuupäätöstä ajallisesti investointi- tai kulutuspäätöksiinsä. Epätäydellisten pääomamarkkinoiden vaikutusta onkin usein kutsuttu ”Volvo-efektiksi” (Malmborg 1967, Johansson ja Löfgren 1985, 138).

Epätäydellisten pääomamarkkinoiden, epävarmuuden ja metsään liittyvien *in situ* -arvostusten takia metsikkökohtainen analyysi ei ole riittävä, vaan tarkastelu täytyy ulottaa koko metsän (metsälön) ikäluokkarakenteeseen ja metsänomistajan koko talouteen kulutus- ja säästämispäätöksineen. Käytännössä näkökulmaa joudutaan laajentamaan myös hakkuisiin ja metsänhoitotöihin liittyvien skaalaetujen takia: metsänkäsittelyn yksikkökustannukset tyypillisesti laskevat pinta-alan kasvaessa. Myös biodiversiteetin suojelussa, maiseman- ja riistanhoidossa sekä myrskytuhojen torjunnassa tulee monesti ottaa huomioon paljon laajempia kokonaisuuksia kuin yksittäiset metsiköt.

Metsikkökohtaisen analyysin puutteisiin on pyritty vastaamaan metsätalouden suunnittelussa ottamalla tavoitteeksi niin sanottu normaalimetsä (*Normalwald, normal forest, fully regulated forest, synchronized forest*). Se koostuu homogeenisesta maa-alasta ja useista pinta-alaltaan samansuuruisista metsiköistä siten, että kullakin kasvaa yksi tasaikäinen puuston ikäluokka. Joka vuosi (tai jakso) hakataan vanhin metsikkö, ja seuraavana vuonna toiseksi vanhin metsikkö saavuttaa uudistuskypsyyden ja joutuu hakattavaksi. Näin jatkuu ikuisesti, joten puun ja metsän muiden hyödykkeiden tuotanto on vakio ja puuston ikärakenne säilyy vuodesta toiseen muuttumattomana.

Normaalimetsää on perinteisesti – ainakin 1700-luvun lopulta lähtien – pidetty metsätalouden ihannetilana siihen liittyvän tasaisuuden takia. Metsäsuunnittelun tutkimuksessa normaalimetsän optimaalisuus on kuitenkin yleensä oletettu ilman analyyttisia tarkasteluja (esim. Davis ja Johnson 1987, Leuschner 1990, Hoganson ja McDill 1993, Davis ym. 2001). Näin on tehty myös metsäekonomisisissa tutkimuksissa, kun on tarkasteltu numeerisin laskelmin raakapuun pitkän aikavälin tarjontaa (Lyon ja Sedjo 1983, 1986, Sedjo ja Lyon 1990, Adams ym. 1996).

Jotta normaalimetsää voitaisiin pitää talousteoreettisesti perusteltuna tavoitteena, pitäisi pystyä osoittamaan analyyttisesti, että se on pitkän aikavälin tasapaino ja että päätöksentekijän kannattaa soveltaa sellaista hakkuupolitiikkaa, joka johtaa metsän ikäluokkarakenteen konvergoitumiseen ajan kuluessa normaalimetsään – olipa metsän alkuperäinen ikäluokkarakenne mikä tahansa.

Kysymys normaalimetsän optimaalisuudesta liittyy läheisesti myös muiden sellaisten kasvi- ja eläinpopulaatioiden hyödyntämiseen, joissa ikäluokkadynamiikka on keskeisellä sijalla (Getz ja Haight 1989). Ongelmalla on läheisiä yhtymäkohtia myös sellaisiin taloudellista kasvua kuvaaviin malleihin, joissa tuottavuuden oletetaan vaihtelevan teknologian kehittymisen, tuotantokoneiston epätasaisen kulumisvauhdin tai työntekijöiden oppimisen takia ja joissa pyritään optimoimaan kulutukseen ja eri-ikäiseen tuotantokoneistoon ohjattavia resursseja ajan kuluessa (esim. Benhabib ja Rustichini 1991, Wan 1994, Boucekkine ym. 1997).

Tämän tutkimuksen tavoitteena on esittää normaalimetsän optimaalisuuteen liittyviä keskeisiä talousteoreettisia tutkimuksia analyyttisesti. Lisäksi muotoillaan ja ratkaistaan päätöksentekijän hyödyn maksimointiin perustuva diskreettiaikainen optimikiertoaikamalli, joka sisältää kuvauksen metsän ikäluokkadynamiikasta, metsäomistajan kulutus- ja säästämispäätökset sekä metsään liittyvät *in situ* -arvostukset. Tällaista mallia ei ole taloustieteellisessä tai metsäekonomisessa kirjallisuudessa tiettävästi aikaisemmin esitetty.

Tutkimus etenee siten, että aluksi tarkastellaan normaalimetsäkäsitteen historiallista syntyä, kehitystä ja merkitystä metsätieteissä. Tämän jälkeen analysoidaan normaalimetsän optimaalisuutta koskevia varhaisia talousteoreettisia tutkimuksia – ennen muuta Mitra ja Wanin (1985, 1986) esittämiä, hyödyn maksimointiin perustuvia diskreettiaikaisia metsän ikäluokkamalleja sekä niiden yleistyksiä, joissa metsämaalla on vaihtoehtoisia käyttömuotoja tai metsämaan viljavuus vaihtelee (Salo ja Tahvonen 2002a, c, d). Neljännessä luvussa muotoillaan ja ratkaistaan diskreettiaikaisen metsän ikäluokkamallin laajennus, jossa metsänomistajan kulutus- ja säästämispäätökset sekä *in situ* -arvostukset otetaan huomioon. Lopuksi esitetään johtopäätöksiä sekä pohditaan saatujen tutkimustulosten merkitystä käytännön metsäsuunnittelun ja -ekonomian kannalta samoin kuin mahdollisia jatkotutkimustarpeita.

2 NORMAALIMETSÄ-KÄSITTEEN HISTORIA METSÄTIETEISSÄ

2.1 Metsänjärjestelyn synty Keski-Euroopassa

Normaalimetsän käsite liittyy läheisesti metsätalouden järjestelyyn (*Forsteinrichtung*), joka kehittyi Saksassa merkantilismin aikakaudella 1600- ja 1700-luvulla. Sen tehtävä oli kohdistaa ja mitoittaa hakkuut parhaalla mahdollisella tavalla ottaen huomioon kestävyyttä koskevat näkökohdat.

Metsänjärjestelyn periaatteet eli niin sanotut metsänjako-opit (*Waldeinteilung)* tähtäsivät ennen muuta metsävarojen käytön jatkuvuuteen ja tasaisuuteen. Vuosittain tuli hakata vain tietty, ennalta määrätty osuus metsistä. Tasaisuus oli tarkoituksenmukainen tavoite pieniin valtioihin pilkkoutuneessa Keski-Euroopassa, jossa kaupankäynti oli vähäistä ja yhteiskunnalliset olot epävarmoja. Tämän vuoksi korostettiin omavaraisuutta poltto- ja rakennuspuun saannissa. Suuria määriä puuta tarvittiin myös rauta-, lasi- ja laivanrakennusteollisuudessa.

Kun Keski-Euroopan väestö lisääntyi nopeasti 1500- ja varsinkin 1700-luvulla, metsiä raivattiin yhä enemmän pelloksi. Huoli mahdollisesta puupulasta lienee ollut taustalla, kun maa- ja metsätalouden kysymyksiä pohtineilta antiikin kirjailijoilta runsaasti vaikutteita saanut Conrad Heresbach esitti vuonna 1571 metsien käytön säännöstelyyn liittyviä, metsän pinta-alaan, puumäärään tai puuston kasvuun perustuvia metsänjakotapoja (Hagfors 1936, 179; Mantel 1980, 580). Tosin ensimmäisiä tämänsuuntaisia, metsien vuotuisen hakkuumäärän tasaisuuteen viittaavia ohjeita oli annettu Erfurtissa jo vuonna 1359.

Merkittävän sysäyksen hakkuiden sääntelyyn antoi vuonna 1648 päättynyt 30-vuotinen sota (Hasel 1985, 214). Sitä on pidetty Keski-Euroopan yhtenä suurimmista katastrofeista keskiajan jälkeen. Säätelyn tarve korostui entisestään sen jälkeen, kun Euroopan mahtivaltioiden välillä käyty seitsenvuotinen sota (1756–1763) oli hävittänyt lisää metsiä.

Hakkuualojen tasasuuruisuuteen pohjautuvia niin sanottuja vuosilohkomenetelmiä käytettiin Saksassa jonkin verran 1600-luvulla. Kuitenkin vasta sen jälkeen, kun eräät 1700-luvun johtavat metsätalousmiehet, kuten Carl Christoph Oettelt ja Hans Dietrich von Zanthier, olivat selkeyttäneet kiertoajan käsitettä ja perustelleet sen merkityksen metsätaloudessa, vuosilohkomenetelmän soveltaminen laajeni (Lihtonen 1944, 31).

Esimerkiksi metsäasioista ja erityisesti tammen kasvatuksesta kiinnostunut Preussin "valistunut itsevaltias", kuningas Fredrik II Suuri määräsi 1700-luvun loppupuolella, että valtionmetsissä oli noudatettava tasaiseen ikäluokkajakaumaan perustuvaa vuosilohkomenetelmää (Ericsson 1906, 16; Fernow 1911, Schwappach 1927, 73). Siinä koko metsäalue jaettiin kiertoajan määräämiin, pinta-alaltaan yhtä suuriin lohkoihin. Jos metsän kiertoaika oli esimerkiksi 70 vuotta, niin myös lohkoja oli 70 kappaletta. Niistä hakattiin vuosittain yksi.

Metsänjärjestelyn kehittyminen 1700-luvun Saksassa ei ollut irrallinen ilmiö, vaan sen taustalla olivat yhteiskuntien organisoituminen valtiojohtoisiksi ja valistusaika, jota leimasi usko järjen voimaan ja rationaaliseen ajatteluun. Löytöretket samoin kuin luonnontieteiden edistyminen olivat avartaneet maailmankuvaa ja osoittaneet, että vanhat käsitykset maailmanjärjestyksestä eivät välttämättä pitäneetkään paikkaansa. Tämä loi tilaa kuuluisien valistusfilosofien esittämälle yhteiskuntakritiikille ja edistysoptimismille.

Tärkeällä sijalla tieteiden kehityksessä oli Carl von Linnén vuonna 1735 ilmestynyt *Systema Naturae* (Luonnon järjestelmä), jossa luokiteltiin kasvi- ja eläinkunta sekä mineraalit. Teos innoitti vähemmän matematiikkaa painottaneiden tieteenalojen harjoittajiakin kehittämään alalleen systemaattisia lähestymis- ja luokittelutapoja (Frängsmyr ym. 1990). Metsät olivat Saksan pikkuvaltioiden tärkeimpiä luonnonvaroja, joten rationaalista päättelyä korostava ajattelutapa levisi myös metsätieteisiin 1700-luvun puolivälissä etenkin Oetteltin, von Zanthierin ja Johann Georg von Langenin ansiosta.

Normaalimetsän käsite esiintyi tiettävästi ensimmäisen kerran vuonna 1788 toisen "valistuneen itsevaltiaan", keisari Joosef II:n valtakaudella laaditussa metsäohjesäännössä (Schüpfer 1927, 416). Tämän niin sanotun itävaltalaisen kameraalitaksamenetelmän alkuperäinen tarkoitus oli määrittää metsän raha-arvo verotusta varten (Judeich 1869). Säännöllisesti ja kestävästi hoidetussa metsässä tuli olla "normaalinen puumäärä" (*Normalvorrat*), jonka perusteella metsän arvo laskettiin. Jos metsän tila poikkesi tästä tilasta, metsää oli "liiaksi säästetty" tai "ylenmäärin käytetty". Nimitys normaalimetsä juontaa siitä, että tuohon aikaan matemaattisesti suuntautuneet metsämiehet kutsuivat laskelmissaan käyttämäänsä normipuuta termillä *Normalbaum*.

Käytännössä normipuiden käyttö tarkoitti luonnossa esiintyvän säännöttömyyden tietynlaista sivuuttamista. Esimerkiksi samanlaisella kasvupaikalla kasvavan, läpimitaltaan yhtä suuren ja yhtä pitkän männyn tilavuus ja kasvu pääteltiin suoraan taulukoista (Lowood 1990, 329–332). Samankaltaisesta luonnon säännöttömyyden kontrolloinnista oli kyse myös normaalimetsän tavoittelussa.

Metsäohjesäännön laatijaa ei tiedetä, mutta saksalainen Johann Christian Paulsen oli esittänyt jo vuotta aikaisemmin (1787) samansuuntaisia ajatuksia. Hänen mukaan vuotuinen hakkuumäärä voitiin laskea vertaamalla normaalimetsän kasvua sen sisältämään puuvarantoon. Ensimmäiset tätä koskevat kasvutaulukot Paulsen esitti kuitenkin vasta vuonna 1795 (Fernow 1911, 115; Schwappach 1927, 76).

Metsänjako-oppeja systematisoivat 1700- ja 1800-luvun vaihteessa etenkin Georg Ludwig Hartig (1795) ja Johann Heinrich Cotta (1804). Nämä aikansa johtavat metsätalousmiehet jakoivat metsän joko pinta-alan (*Flächenfachwerk*), puumäärän (*Massenfachwerk*) tai molempien (*kombiniertes Fachwerk*) perusteella yhtä suuriin osiin. Menetelmien saksankieliset nimitykset johtuvat siitä, että kullekin laskentajaksolle tehtiin paperille sarake tai ristikko (*Fachwerk*), johon metsät ikänsä mukaan sijoitettiin. Samantyyppisiä menetelmiä olivat ehdottaneet tai käyttäneet jo muutamia vuosikymmeniä aikaisemmin monet muutkin metsätalousmiehet, kuten von Langen, von Zanthier ja von Lassberg Saksissa, Gottlob Magnus von Wedell, Carl Philipp von Kropff ja Carl Wilhelm Hennert Preussissa, sekä metsätieteen matemaattisia perusteita kehittänyt pappi Johann Ehrenfried Vierenklee (Ericsson 1906, 16; Martin 1910, 4; Fernow 1911, 71; Lowood 1990).

Kehittyneemmissä metsänjako-opeissa otettiin huomioon myös metsämaan tuottokyvyn vaihtelu: parempaa maata vastasi keskimääräistä pienempi vuosilohko, huonompaa taas suurempi. Lisäksi kehitettiin menetelmiä, joilla metsästä saatavat tulot pysyisivät tasaisina vuodesta toiseen.

Itävaltalainen metsäohjesääntö loi perustan metsänjärjestelyn myöhemmälle kehitykselle. Kuitenkin vasta sen jälkeen, kun C.C. André esitti vuonna 1811 yleiskuvauksen kameraalitaksan soveltamisesta hakkuiden laskemiseen ja hänen poikansa Emil julkaisi sen kirjana vuonna 1823, menetelmää ryhdyttiin soveltamaan laajemmin metsänjärjestelyssä. Periaate oli yksinkertainen: jos metsä oli normaalitilassa, vuotuinen hakkuumäärä oli yhtä suuri kuin puuston kasvu. Jos taas metsän puumäärä oli pienempi kuin normaalinen, oli hakattava kasvua vähemmän, jotta normaalimetsä olisi voitu saavuttaa niin kutsutun "tasausajan" kuluessa (Ericsson 1903, 150; 1906, 24).

1800-luvun alkupuolella normaalimetsää koskevia teorioita ja laskentamenetelmiä kehittivät etenkin Johann Christian Hundeshagen (1826) ja Carl Justus Heyer (1841). Paljolti heidän ansiostaan normaalimetsän käsite ja sitä koskeva teoria nousi keskeiseen asemaan metsätalouden järjestelyssä ja metsätieteellisessä kirjallisuudessa. Kuvaavaa on, että vielä nykyisinkin Suomessa laskettavat "suurimmat kestävät hakkuusuunnitteet" pohjautuvat kameraalitaksamenetelmään. Vanhojen metsänjärjestelytapojen elinvoimaisuus vuosisatojen saatossa johtuu paljolti siitä, että niiden on perinteisesti katsottu turvaavan metsätalouden (puuntuotannollisen ja sosiaalisen) kestävyyden (*Nachhaltigkeit*), jota on pidetty yhtenä metsätalouden keskeisimmistä periaatteista.

2.2 Normaalimetsän merkitys Suomessa

Suomessa, kuten muissakin Euroopan maissa, on perinteisesti nojattu saksalaisiin metsänhoidon menetelmiin ja metsätalouden järjestelytapoihin. Tosin järjestettyä metsätaloutta ryhdyttiin meillä harjoittamaan vasta 1800-luvun jälkipuoliskolla – aluksi valtion välittömässä hallinnassa olevissa metsissä ja valtion virkatalojen metsissä ja vasta verraten myöhään yhteisöjen ja yksityisten metsissä.

Saksalaismallista lohkohakkausta (lohkoittaista paljaaksihakkausta) esitti tiettävästi ensimmäisenä Turun yliopiston kasvitieteilijä V.F. Radloff, jonka Ruotsin kuningas oli lähettänyt vuonna 1805 opiskelemaan metsänhoitoa Saksaan (Hagfors 1929, 4). Lohkohakkauksiin siirtymistä ehdottivat myös pitkään Suomen Talousseuran sihteerinä toiminut Carl Christian Böcker (1829) kirjassaan *On skogars skötsel i Norden* ja Maanmittauslaitoksen yhteydessä toimineen väliaikaisen metsähallinnon johtaja Claës Wilhelm Gyldén (1853) metsänhoidon ja metsätalouden järjestelyn oppi- ja käsikirjassaan *Handledning för skogshushållare i Finland*. Gyldénin mukaan metsien häviäminen saataisiin estetyksi, jos harsintahakkuut lopetettaisiin ja metsätaloutta harjoitettaisiin kestävästi vuosilohkomenetelmää soveltaen.

Gyldén esitti hakkuulaskelmaesimerkin, joka ulottui vuodesta 1854 vuoteen 2013 asti, mutta tiettävästi ensimmäisiä varsinaisia hakkuulaskelmia Suomessa tekivät kuuluisassa saksilaisessa Tharandin metsäakatemiassa 1800-luvun jälkipuoliskolla opiskelleet Evon metsäopiston johtaja Bernhard Ericsson (1906) ja Metsähallituksen metsänhoidon tarkastaja Karl Moring (1907). He käyttivät laskelmissaan pinta-alaan pohjautuvaa metsänjakotapaa, joka oli peräisin Tharandin johtajana toimineelta Cottalta.

Suurin osa maamme metsätalouden ja -tieteen johtohahmoista 1800-luvun lopussa ja 1900-luvun alussa oli opiskellut Saksassa (mm. professori Max Robert Preßlerin oppilaina Tharandissa) tai saaneet sen metsäkirjallisuudesta vahvoja vaikutteita. Tässä mielessä on ymmärrettävää, että hekin samaistivat normaalimetsän vakauteen, jatkuvuuteen ja metsätalouden kestävyyteen.

Metsähallituksen pääjohtajana ja Suomen Metsätieteellisen Seuran ensimmäisenä puheenjohtajana toiminut Peter Woldemar Hannikainen (1896) kertoi, että tasaikäinen metsä, joka antaa hakkuutuloja vain ehkä kerran tai pari kolmen miespolven aikana, ei voi joutua inhimillisen hoidon ja huolenpidon kohteeksi, koska se ei täytä sitä tehtävää, mikä metsällä ihmisten taloudessa on. Tällä tehtävällä hän lienee viitannut poltto- ja rakennuspuun saantiin. "Kestävää metsätaloutta" voitaisiin hänen mukaansa harjoittaa jakamalla metsäalue tiettyyn määrään yhtä suuria lohkoja, joista hakattaisiin vuosittain yksi.

> "Täyttääkseen sitä taloudellista tehtävää, joka metsällä on, tulee siinä olla kaikenikäisiä puita tai metsiköitä, jotta siitä alati on tarpeen mukaan saatavissa valmistunutta puutavaraa." (mt., 136)

Hannikainen kirjoitti yksityiskohtaisesti myös normaalimetsän koostamisesta käyttäen hyväksi saksalaisperäisiä metsänjako-oppeja. Vaikka hän oli vakuuttunut ikäluokkien tasoittamisen edullisuudesta, niin hän huomautti nykynäkemyksen mukaan aivan oikein, että normaalimetsään ei kannata pyrkiä liian nopeasti, koska tällöin "päämäärä ei ollenkaan vastaa niitä uhria, joita sen kautta nykyiseltä metsältä vaaditaan" (Hannikainen 1885, 98).

Hannikainen korosti muutenkin hakkuiden joustavuutta. Täsmälleen samansuuruisen vuotuisen hakkuumäärän tavoittelu oli vain harvoin edullinen ratkaisu metsänomistajalle, koska hänen vuotuiset tarpeensa samoin kuin puun kysyntä ja liikenneolot tulisivat vaihtelemaan. Oli löydettävä keskitie, jossa ikäluokat saataisiin hyvin järjestetyksi ja metsän senhetkiset puuvarat edullisesti käytetyksi (mt., 94).

Myös Evon metsäopiston johtaja Bernhard Ericsson (1903, 151) painotti metsätalouden järjestelyä koskevassa oppi- ja käsikirjassaan, että normaalimetsää ei voida luoda ilman tuntuvia uhrauksia, koska puuston ikäluokat eivät ole tällä tavalla järjestettynä luonnossa. Teoksensa toisessa osassa, joka käsitteli nimenomaan metsänjako-oppia, Ericsson (1906) esitteli metsän hakkuumäärän laskemiseksi lukuisia menetelmiä. Niistä lähes kaikki pohjautuvat normaalimetsään tai sen tavoitteluun; tunnetuimpia ovat kameraalitaksa (*Austrian formula*) sekä Huberin, Hundeshagenin, Karlin, Heyerin, Mantelin, Breymannin, Hufnaglin ja Hanzlikin kaavat.

Valtion metsänhoidon tarkastajana toiminut ja niin ikään Saksassa opiskellut Valter Lindholmkin (1909) totesi ansiokkaassa hakkuulaskelmia koskeneessa artikkelissaan, että normaalimetsän tavoittelu ei ole välttämättä taloudellisesti järkevää, jos metsälön ikäluokkajakauma on alunperin kovin epätasainen. Tällöin esiintyi aina ristiriitaisia vaatimuksia: "finanssinäkökanta" vaati metsikön hakattavaksi taloudellisesti edullisimmalla hetkellä, kun taas "kestävyysperiaatteen" tavoitteena oli tuotannon ajallinen tasoittaminen eli pyrkimys kohti normaalimetsää.

Taloudelliselta kannalta katsoen ei Lindholmin mielestä ollut edullista tehdä suuria siirtoja aikakaudesta toiseen, vaikka ankara kestävyysperiaate sitä olisi vaatinutkin. Päinvastoin, jäykkien kestävyyteen perustuvien kaavojen käyttäminen hakkuulaskelmien teossa saattoi pikemminkin johtaa "rahallisesti sangen epäviisaisiin tuloksiin".

Hannikaisen, Ericssonin ja Lindholmin tavoin Helsingin yliopiston pitkäaikainen metsänarvioimistieteen professori Erik Lönnroth (1920, 117, 129) huomautti kahden näkökohdan – finanssi- eli metsikkötalousperiaatteen ja kestävyys- eli tasaisuusperiaatteen – joutuvan hakkauslaskelmissa enemmän tai vähemmän toisiaan vastaan metsän ollessa epänormaalinen. Tällöin periaatteiden välillä oli tasapainoiltava ja normaalimetsä oli pyrittävä saamaan aikaan vähimmin mahdollisin uhrauksin käyttäen "yhdistettyä metsikkötalous- ja ikäluokkamenettelyä". Lönnroth ei kuitenkaan täsmentänyt, mitä tämä tarkoitti käytännössä. Sen sijaan hän totesi, että kestävyys ja tasaisuus ovat mitä tärkeimpiä periaatteita metsätalouden järjestelyssä, ja että

> "metsikkökohtaisen yksilöfinanssiedun rinnalle ehdottomasti on asetettava vaatimus, että myös kestävyys-tasaisuusperiaatteen vaatimukset tulevat osaltaan toteutetuiksi metsätalouden järjestelyssä.

Tämä toinen periaate on siis periaate, joka huolehtii metsästä kokonaisuutena ja joka pyrkii asettamaan metsän kokonaiskäytön oikeaan suhteeseen yleiseen puutavarakulutukseen ja -kysyntään ja sen ehtona on tiettävästi lähinnä normalinen ikäluokkajaoitus metsässä." (mt., 128)

Metsätalouden järjestelyn ihannerakenne – vuosilohkomenetelmä – oli selväpiirteinen ja takasi puuntuotannon kestävyyden, mutta sen käytännön soveltaminen osoittautui vaikeaksi. Tämä johtui siitä, että maamme metsät olivat 1800-luvulla ja 1900-luvun alussa epätasaisia (epänormaalisia) ja huonossa kunnossa, eivätkä lohkohakkuut läheskään aina olleet taloudellisesti kannattavia pitkien kuljetusmatkojen ja pienen puun heikon menekin takia. Lisäksi vuosilohkomenetelmän tavallisin sovellus, lohkoittainen paljaaksihakkuu, edellytti yleensä metsän uudistamista kylvämällä tai istuttamalla, mikä ei ollut laajassa mitassa mahdollista huonojen kulkuyhteyksien ja korkeiden työkustannusten takia (Cajander 1910, 47–48).

Vuosilohkojärjestelmän käyttö rajoittuikin 1800-luvun lopussa ja 1900-luvun alussa lähinnä metsää omistavien tehtaiden, suurten kartanoiden ja valtion virkatalojen metsiin. Järjestelmä soveltui erityisen hyvin kirkollis- ja siviilivirkatalon haltijoiden metsänkäytön rajaamiseen, koska säädösten mukaan vuokralainen sai nauttia vain metsän tuotosta koskematta pääomaan (Leikola 1998, 18–19).

Vuosilohkomenetelmää kokeiltiin 1800-luvun loppupuolella myös varsinaisilla valtionmailla, jotka sijaitsivat pääosin Pohjois-Suomessa. Tällöin sovellettiin yleensä 100–140 vuoden kiertoaikaa. Hakkuisiin ei metsien huonon kunnon takia kuitenkaan ryhdytty heti, vaan vasta verraten pitkän, 30–50 vuoden "valmistuskauden" jälkeen (Lakari 1928, 108–109; Lihtonen 1944, Laitakari 1960). Sen kuluessa metsän kunnon katsottiin olevan muutettavissa ratkaisevasti parempaan suuntaan. Vuosilohkojärjestelmä osoittautui lopulta käytäntöön soveltumattomaksi myös varsinaisilla valtion mailla muun muassa pitkän valmistuskauden ja puutavaran vaihtelevien kysyntäolojen takia.

Ensimmäinen valtakunnan metsien inventointi 1920-luvulla paljasti, että maamme metsät olivat huonossa kunnossa ja puuston ikäluokkajakauma oli hyvin epätasainen. Vanhoja, hakkuukypsiä metsiä oli määrämittahakkuiden seurauksena vähän Lappia ja Perä-Pohjolaa lukuun ottamatta, ja nuorten metsien osuus oli alle 10 prosenttia metsämaan pinta-alasta, kun tasaisten ikäluokkasuhteiden mukaan sen olisi pitänyt olla selvästi suurempi, 25 prosenttia. Lisäksi keskikuutiomäärä kasvullisella metsämaalla oli alhainen (75 m^3/ha), ja erityisen alhainen se oli yksityismetsissä.

Tilannetta pyrittiin korjaamaan tekemällä pitkän tähtäyksen valtakunnallisia hakkuusuunnitelmia. Saksalaisten metsätalouden oppien mukaisesti päämääränä oli saada aikaan puuston tasainen ikäluokkajakauma (Lönnroth 1930, 762–763; Lihtonen 1943, 34; 1959, 45). Koska täydellistä normaalimetsää on käytännössä vaikea saavuttaa esimerkiksi taloudellisten olojen vaihteluiden ja metsien kehitykseen liittyvän epävarmuuden takia, "riittävää" normaalitilan astetta ryhdyttiin Lönnrothin (1930) aloitteesta kutsumaan *reaalinormaalimetsäksi.*

Toisen maailmansodan aikana huoli teollisuuden puunsaannista voimistui, mikä johti puumarkkinoiden säännöstelyyn, velvoitehakkuisiin sekä vajaatuottoisten metsien avohakkuisiin ja viljelyyn. Tällöin laadittiin myös ensimmäiset yksityiskohtaiset valtakunnalliset hakkuulaskelmat. Helsingin yliopiston pitkäaikainen metsänarvioinnin professori ja myöhempi Suomen Akatemian jäsen Yrjö Ilvessalo (1943) käytti niiden aineistona toisen valtakunnan metsien inventoinnin tuloksia ja esitti kaksi eri perustein tehtyä laskelmaa. Niistä toinen pohjautui tasaisen ikäluokkajakauman tavoitteluun, toinen metsien metsänhoidolliseen tilaan.

Muutamaa vuotta myöhemmin hakkuulaskelmia ryhdyttiin tekemään metsänarvioinnin professori Vilho Lihtosen (1943) kehittämällä *tuottohakkuulaskelmalla.* Sen taustalla oli ajatus "edistyvästä metsätaloudesta" ja normaalimetsästä: metsiä tuli käsitellä kestävyysperiaatteen mukaan siten, että niistä voitiin tulevaisuudessa jatkuvasti hakata vähintään nykyisten hakkuumahdollisuuksien verran. Laskelma eteni siten, että aluksi valittiin kiertoaika, minkä perusteella sitten laskettiin vuotuinen uudistusala tavoitellen tasaista ikäluokkajakaumaa ja edullisia puulajisuhteita. Käytännössä yksittäisten metsiköiden kiertoaikoja myöhennettiin tai varhennettiin tasaisen ikäluokkajakauman aikaansaamiseksi tietyn talouskokonaisuuden muodostavalle alueelle.

Kun puuntuotannon kohottaminen nousi toisen maailmansodan jälkeen entistäkin tärkeämmäksi tavoitteeksi metsäpolitiikassa, staattisena pidetyn normaalimetsän rinnalle kehitettiin edistyvän metsätalouden hengessä uusi käsite, *tavoitemetsä.* Käytännössä tällä tarkoitettiin sitä, että tasaisesta ikäluokkajakaumasta tai sen tavoittelusta voitiin väliaikaisesti poiketa, jotta vajaatuottoisiksi katsotut alueet saatiin nopeasti uudistetuksi, puulajisuhteet muutetuksi taloudellisesti edulliseksi, suot ojitetuksi ja yleistyvät harvennushakkuut tehdyksi. Myöhemmin laadituissa valtakunnallisissa metsätalousohjelmissa (mm. TEHO, HKLN, MERA ja Metsä 2000) on noudatettu pitkälti samoja periaatteita.

Voidaankin sanoa, että (reaali)normaalimetsä on ollut Suomen metsätaloudessa keskeinen tavoite jo yli 100 vuotta laskettaessa valtakunnallisia ja alueellisia hakkuusuunnitteita. Tässä mielessä ei ole yllättävää, että Etelä-Suomen metsät ovat nykyään lähes tasaisesti jakautuneet eri ikäluokkiin, jos kiertoaikana pidetään 100 vuotta, ja Pohjois-Suomessakin ollaan jo lähellä normaalimetsää, jos kiertoajan oletetaan olevan 160 vuotta (Metsätilastollinen... 2002, 42, 57).

Normaalimetsään pyrkiminen on ollut vuosikymmeniä eräänlainen kirjoittamaton sääntö myös tilakohtaisessa metsäsuunnittelussa, jossa on tyypillisesti pyritty ajallisesti tasaisiin hakkuisiin. Tätä on kutsuttu ”tilakohtaiseksi kestävyydeksi”. Vielä nykyäänkin tilakohtaisissa metsäsuunnitelmissa keskeiseksi tavoitteeksi mainitaan tasaiset hakkuut:

> ”Jotta puuntuotanto ja hakkuutulojen saanti olisi jatkuvasti mahdollisimman tasaista, metsässä tulisi olla eri kehitysluokkia suunnilleen saman verran. Metsäsuunnitelman laskennassa kehitysluokkien tavoitepinta-alaosuuksiin ovat vaikuttaneet metsälön maantieteellinen sijainti sekä eri kasvupaikkojen ja puulajien osuudet. Mikäli metsänomistaja ei ole esittänyt muita tavoitteita, suunnittelija pyrkii toimenpide-ehdotuksilla ohjaamaan kehitysluokkien jakaumaa niin, että hakkuumahdollisuuksia on tasaisesti.” (Metsäsuunnitelma 2000)

On kuitenkin selvää, että tasaisten hakkuiden tavoittelu ei ole välttämättä kannattavaa metsänomistajalle, jos hän joutuu vastapainoksi selvästi poikkeamaan metsiköiden (Faustmannin kaavalla lasketuista) taloudellisesti optimaalisista kiertoajoista. Silloinkin, kun tasaisen ikäluokkajakauman tavoittelua voidaan pitää taloudellisesti perusteltuna, on syytä kysyä, miten nopeasti normaalimetsään tulisi pyrkiä, jos metsän ikäluokkarakenne ei ole alunperin tasainen.

2.3 Metsäsuunnittelun uudempi kehitys

Keski-Euroopassa 1800-luvulla kehitetyt hakkuulaskelmamenetelmät perustuivat siis normaaliseen puumäärään tai sen tavoitteluun. Sitä mukaa kun metsän inventointimenetelmät kehittyivät, laskelmissa pyrittiin ottamaan huomioon myös metsän ikärakenteen epänormaalisuus lähtötilanteessa. Esimerkiksi Hanzlik (1922) loi kaavansa aikana, jolloin Yhdysvaltain luoteisosissa oli vielä runsaasti vanhoja luonnonmetsiä.

Metsätieteiden ja yhteiskunnallisten olojen kehittyessä myös kestävyydelle luotiin uusia määritelmiä. Saaren (1950) aloitteesta Suomen metsätaloudessa ja -tieteessä ryhdyttiin käyttämään yleisesti käsitteitä dynaaminen kestävyys ja *edistyvä metsätalous*. Käytännössä niillä tarkoitettiin hakkuumahdollisuuksien lisäyksen tavoittelua. Samansuuntaisia ajatuksia olivat esittäneet jo aikaisemmin muun muassa Saari ja Ilvessalo (1929). Näiden periaatteiden – normaalimetsän ja suurimman puuntuotoksen tavoittelun – pohjalta Lihtonen (1943) kehitti sitten tuottohakkuulaskelman, Kuusela (1959) suurimman kestävän hakkuusuunnitteen sekä Kuusela ja Nyyssönen (1962) tavoitehakkuulaskelman.

Tietokoneiden yleistyttyä 1970-luvulla metsäsuunnitteluun ja hakkuulaskelmiin liittyviä ongelmia ryhdyttiin ratkaisemaan lineaariseen ohjelmointiin perustuvilla menetelmillä. Niitä käytetään metsäsuunnittelussa edelleenkin yleisesti. Vaikka nykyisissä hakkuulaskelmissa normaalimetsän käsitettä ei yleensä mainita, niin (puuntuotannon) kestävyydellä, tasaisuudella ja puuston eri kehitysluokkien tavoitepinta-alaosuuksilla tarkoitetaan käytännössä samaa asiaa. Nykyiset laskelmat perustuvat tyypillisesti metsikkö- ja metsälötalouden yhdistelmään: yksittäisten metsiköiden käsittelyt johdetaan metsälötason (tai metsäaluetason) optimiratkaisuista. Kehittyneemmissä metsäsuunnittelumalleissa puuston ikäluokkien välinen riippuvuus on pyritty ottamaan huomioon endogenisoimalla puun hinta (Johnson ja Scheurman 1977, 19–26).

Myös MEtsäLAskelma- eli MELA-ohjelmisto, joka on laajassa käytössä Suomen metsätaloudessa, nojaa metsikkötarkasteluun ja eksogeeniseen puun hintaan (klassiseen Faustmannin malliin). Tämä johtaa helposti hakkuumäärän suureen vuotuiseen vaihteluun. Tämän estämiseksi vuotuisia hakkuita joudutaan tyypillisesti rajoittamaan siten, että samalla tullaan implisiittisesti olettaneeksi tasaisen puuntuotannon optimaalisuus.

Taloustieteen kannalta tämänkaltaisia rajoituksia voidaan pitää keinotekoisina, koska kysymys normaalimetsän optimaalisuudesta pitkällä aikavälillä on edelleen pääosin ratkaisematta. Asialla on paitsi teoreettista myös käytännön merkitystä, koska epätasaisen ikäluokkarakenteen tasoittaminen tai muuttaminen normaalimetsäksi voi tutkimusten mukaan aiheuttaa huomattavia taloudellisia tappioita puhtaan metsikkötalouden harjoittamiseen verrattuna (esim. Hoganson ja McDill 1993).

3 METSÄN IKÄLUOKKAMALLEISTA

3.1 Varhaiset taloustieteelliset tutkimukset normaalimetsän optimaalisuudesta

Kysymys normaalimetsän optimaalisuudesta alkoi kiinnostaa taloustieteilijöitä 1970-luvun lopussa. Kemp ja Moore (1979) tutkivat normaalimetsän ja tasaisten hakkuiden optimaalisuutta ensimmäisten joukossa olettaen, että päätöksentekijällä on hallussaan tietty määrä homogeenista, paljasta metsämaata, jonne istutetaan puuntaimia. Hyötyä saadaan hakatusta puumäärästä, jota ei voida varastoida, ts. kaikki puutavara pitää kuluttaa samalla periodilla kuin se hakataan. Lisäksi oletetaan, että metsämaalla ei ole vaihtoehtoisia käyttömuotoja, metsänkäsittely (istutus, metsänhoito ja hakkuut) ei aiheuta kustannuksia ja aika on jatkuva muuttuja.

Päätöksentekijän ongelma on max $\sum_{t-1}^{\infty} \delta^t U(c_t)$, jossa $\delta > 0$ on korko, U aidosti konkaavi hyötyfunktio ja c_t hakattu (ja kulutettu) puumäärä periodin t alussa. Metsänomistajan siis oletetaan "kuluttavan" rahan sijasta puuta. Vastaavalla tavalla esimerkiksi Hotellingin (1931) mallissa luonnonvaran käyttö on suoraan hyötyfunktion argumentti.

Kemp ja Moore (1979) eivät esittäneet metsän ikäluokkadynamiikkaa koskevia rajoitteita eksplisiittisesti eivätkä pystyneet löytämään yleistä ratkaisua muotoilemaansa ongelmaan. Sen sijaan he kertoivat tehneensä numeerisia laskelmia muutamalla erikoistapauksella olettaen, että puuston kasvukäyrä on logistinen ja $U(c_t) = 1 - e^{-\alpha c_t}$, jossa α on jokin positiivinen vakio. Tulokset viittasivat siihen, että ajan kuluessa metsä lähestyy stationaarista tilaa, jossa puuntuotanto pysyy vakiona. Lyhyestä julkaisusta ei kuitenkaan ilmene tarkemmin, mihin kyseiset laskelmat ja päätelmät perustuivat.

Klassisessa Faustmannin mallissa hakkuun yksikkökustannukset oletetaan vakioksi, mutta todellisuudessa näin lienee vain harvoin. Heaps ja Neher (1979) kehittivät mallin, jossa kustannukset riippuvat epälineaarisesti hakkuumäärästä, metsä on homogeenista ja uusi metsä istutetaan samalla hetkellä kuin vanha kaadetaan. Metsämaa ja aika ovat jatkuvia muuttujia, joten mikä tahansa metsäpinta-ala on mahdollista hakata milloin tahansa. Heaps ja Neher eivät kuitenkaan pystyneet ratkaisemaan malliaan analyyttisesti.

Myöhemmin Heaps (1984) esitti saman mallin ja kehitti sen ratkaisua. Hän oletti, että kun metsänomistaja hakkaa yhden hehtaarin a-ikäistä metsää, omistaja saa nettotulon $p(a)$. Samalla aiheutuu kustannus $C(h)$, jossa h on hakkuun pinta-ala (hehtaaria aikayksikköä kohti). Kun korkoa merkitään δ:lla ja aikaa t:llä, päätöksentekijän ongelma on maksimoida

$$\int_0^{\infty} \{p\,[a(t)]\,h(t) - C\,[h(t)]\}\, e^{-\delta t} dt. \tag{3.1}$$

Funktioista $p(a)$ ja $C(h)$ Heaps teki seuraavat oletukset:
(a) $p(0) \leq 0,\ \ p(a) > C'(h_{\min})$ jollakin a,
(b) $\dot{p}(a) \geq 0\ \ \forall a, \quad \lim_{a\to\infty} \dot{p}(a) = 0$,
(c) $\ddot{p}(a) - r\dot{p}(a) \leq 0\ \ \forall a$,
(d) $C(0) \geq 0$,
(e) $C(h)/h$ on konveksi ja $[C(h)/h\ ]_{\min}$, kun $h = h_{\min}$.

Oletukset (a) ja (b) kuvaavat metsän arvon kehitystä puuston iän funktiona; yksi tulkinta funktiolle $p(a)$ on logistinen käyrä. Näin ollen a-ikäisen metsän diskontatulla arvolla $p(a)e^{-\delta a}$ on olemassa maksimi. Oletus (c) taas varmistaa sen, että termillä $p(a)e^{-\delta a}$ on olemassa yksikäsitteinen lokaali ääriarvo, joka on samalla globaali maksimi. Kohdat (d) ja (e) sisältävät tavanomaisen taloustieteellisen oletuksen keskimääräisiä kustannuksia kuvaavan käyrän muodosta – tosin käytännössä Heaps rajoittui tarkastelemaan tilannetta, jossa $C(h)/h$ on kasvava ja konveksi.

Heaps oletti yksinkertaisuuden vuoksi, että jos on optimaalista hakata metsää hetkellä t, niin silloin kaadetaan metsän vanhimpia puita. Hän merkitsi funktiolla $H(t)$, $t > 0$ hakattua pinta-alaa hetkestä 0 hetkeen t ja funktiolla $H(t)$, $t < 0$ alle $-t$ -ikäisten puiden kattamaa pinta-alaa hetkellä 0. Siten $h(t) = \dot{H}(t)$, $t > 0$ kuvaa hakkuualaa (hehtaaria aikayksikköä kohti) ja $h(t) = \dot{H}(t)$, $t < 0$ metsän alkuperäistä ikäluokkajakaumaa. Kyseessä on optimiohjausongelma, jossa $h(t)$ on kontrollimuuttuja ja $H(t)$ tilamuuttuja.

Heapsin mallissa $v(t)$ kuvaa ajankohtaa, jolloin metsän vanhimmat puut istutettiin, ja $w(t)$ ajankohtaa, jolloin metsän nuorimmat puut tullaan hakkaamaan. Siten vanhimpien puiden ikä hetkellä t on $t - v(t)$. Muut puut ovat tätä nuorempia, joten ne on istutettu ajankohtien $v(t)$ ja t välissä. Koska kaikki ikäluokat on oletuksen mukaan hakattu ja istutettu täsmälleen yhden kerran kyseisen ajanjakson kuluessa, niin $H(t) = H[v(t)] + A$, jossa A on koko metsän pinta-ala. Vastaavasti oletetaan, että jokainen ikäluokka hakataan täsmälleen yhden kerran aikavälillä t ja $w(t)$, joten $H[w(t)] = H(t) + A$.

Edellä mainituista riippuvuuksista Heaps johti seuraavat funktionaaliset differentiaaliyhtälöt, jotka kuvaavat mallin dynamiikkaa:

$$h(v)\dot{v} = h(t) = h(w)\dot{w}. \tag{3.2}$$

On huomattava, että funktiot $v(t)$ ja $w(t)$ ovat epäjatkuvia, jos hakkuita ei jossakin vaiheessa tehdä lainkaan. Toisaalta kun $h(t) > 0$, niin

$$v[w(t)] = t \quad \text{ja} \quad w[v(t)] = t, \tag{3.3}$$

eli w on funktion v käänteisfunktio.

Edellä esitetyn perusteella Heaps muotoili päätöksentekijän ongelmaksi

$$\max_{\{h\}} V = \int_0^\infty \{p[(t - v(t)]\, h(t) - C([h(t)]\}\, e^{-\delta t} dt, \tag{3.4}$$

ehdolla, että

$$\dot{H} = h, \tag{3.5}$$

$$H(t) - H(v) \equiv A, \tag{3.6}$$

$$H(t), \text{ kun } t < 0, \text{ ja } v(0) \text{ annettuja}, \tag{3.7}$$

$$h \in \Omega. \tag{3.8}$$

Mallissa $v(t)$ on viivästysfunktio ja $h \in \Omega$ kuvaa hakkuille asetettuja rajoitteita; Heaps oletti, että $\bar{h} \geq h_{\min}$.

Optimin välttämättömiä ehtoja ei saada suoraan maksimiperiaatteesta, vaan ne muodostavat monimutkaisen, viivästettyjen differentiaaliyhtälöiden systeemin. Sen johtamisen sijasta seuraavaksi esitetään mallin keskeiset tulokset.

Jos hakkuun keskimääräiset kustannukset ovat lineaariset, ts. $C(h) = ch$, $c > 0$, metsä kannattaa hakata Faustmannin säännön mukaan. Tällöin normaalimetsä on optimaalinen pitkän aikavälin tasapaino vain siinä tapauksessa, että metsän alkuperäinenkin ikäluokkajakauma on tasainen.

Kun hakkuun yksikkökustannuskäyrä on aidosti konveksi, ongelman matemaattinen ratkaiseminen vaikeutuu huomattavasti. Heaps osoitti analyyttisesti, että *jos* on olemassa pitkän aikavälin tasapaino, se on normaalimetsä. Hän ei kuitenkaan pystynyt todistamaan, että optimiratkaisu todella konvergoi normaalimetsään.

Heapsin oletus hakkuun yksikkökustannuskäyrän muodosta on huomionarvoinen. Hän oletti sen olevan nouseva ja (aidosti) konveksi, mikä voi olla realistinen oletus tilatasolla, jos metsänomistaja hakkaa kaiken puun itse, koska omistajan työpanos on rajallinen. Jos hakkuut sen sijaan tekee ulkopuolinen urakoitsija, yksikkökustannukset eivät tyypillisesti nouse, vaan pikemminkin laskevat hakattavan pinta-alan kasvaessa, ts. hakkuun yksikkökustannuskäyrä on laskeva ja aidosti konveksi.

Toinen huomionarvoinen seikka on se, että Heaps oletti yksikkökustannusten riippuvan vain hakkuumäärästä. Todellisuudessa vanhojen (järeämpien) puiden hakkaaminen on yleensä huomattavasti halvempaa kuin nuorten puiden. Separoitumattoman kustannusfunktion $C(h, a)$ käyttäminen olisi Heapsin mukaan kuitenkin monimutkaistanut ongelman ratkaisemista huomattavasti.

Lopuksi on syytä huomauttaa, että Heapsin malliin sisältyvä kuvaus metsämaan luonteesta ei välttämättä ole kovin realistinen ainakaan pohjoisella havumetsävyöhykkeellä, jossa pienin käsittely-yksikkö on yleensä metsikkö tai ainakin yksi puu. Heapsin mallia, jossa sekä aika että maa-ala ovat jatkuvia muuttujia, ei tiettävästi olekaan sittemmin kehitetty pitemmälle.

Normaalimetsän käsitettä on sivuttu myös pohdittaessa raakapuun tarjontaa. Koska puun hinta on eksogeeninen muuttuja klassisessa Faustmannin mallissa, on luonnollista kysyä, millainen on malli, jossa optimoidaan kiertoaikaa ja joka selittää puun hinnan muodostumista. Samuelson (1976) sivusi tätä metsäekonomian keskeistä kysymystä huomauttaessaan, että Faustmannin kiertoaika on *steady state* -ratkaisu. Hän muotoili ikäluokkamallin piirteitä sisältävän dynaamisen mallin, joka on kuitenkin jäänyt vaille jatkokehittelyä. Myös Binkley (1987) on painottanut metsän ikäluokkadynamiikan ja puun tarjonnan välistä yhteyttä, mutta hänkään ei ole ratkaissut eksplisiittisesti mitään mallia.

3.2 Diskreettiaikainen ikäluokkamalli

3.2.1 Model II ja Mitra–Wan-malli

Diskreettiaikaisen metsän ikäluokkamallin esittivät tiettävästi ensimmäisinä Johnson ja Scheurman (1977). Heidän mallissaan (ns. Model II) puuston ikäluokkien välinen riippuvuus pyrittiin ottamaan huomioon endogenisoimalla puun hinta. Johnson ja Scheurman esittivät Kuhn–Tucker-ehdot optimille, mutta eivät jatkaneet analyysiaan pitemmälle.

Myöhemmin Mitra ja Wan (1985, 1986) selvittivät normaalimetsän optimaalisuutta samantyyppisellä mallilla, jonka on tulkittu kuvaavan kilpailullisia raakapuumarkkinoita, suunnittelijan yhteiskunnallisen hyödyn maksimointiongelmaa, omavaraista (autarkkista) metsälöä tai monopolimetsänomistajan voitonmaksimointiongelmaa, jossa U on voittofunktio (Mitra ja Wan 1985, 1986, Sedjo ja Lyon 1990, Tahvonen ja Salo 2000).

Mitran ja Wanin esittämän diskreettiaikaisen ikäluokkamallin oletukset ovat varsin vahvoja. Metsänomistaja käyttää puunsa (tai puunmyyntitulonsa) välittömästi hakkuun jälkeen, harvennushakkuita ei tehdä, hakkuun yksikkökustannukset ovat lineaariset tai konveksit, metsänhoidosta ei aiheudu mitään kustannuksia (ei edes uudistamiskustannuksia), maa-ala metsitetään (kylvetään) heti päätehakkuun jälkeen, metsämaalla ei ole vaihtoehtoisia käyttömuotoja, ja metsiköt eroavat toisistaan ainoastaan iän ja puuston tilavuuden suhteen. Jokaisella diskreetillä ajanjaksolla voidaan päätehakata mielivaltaisen pieni (ei-negatiivinen) osa kustakin metsiköstä, koska maapinta-ala on jatkuva muuttuja, kuten Heapsin (1984) mallissa. Päätöksentekijän ongelma on maksimoida metsästä saatava diskontattu hyöty siten, että rajoitteena on kuvaus metsän ikäluokkajakaumasta ja sen dynamiikasta. (Rajoitteisiin palataan myöhemmin.)

Mitra ja Wan (1985, 1986) esittivät mallinsa käyttäen hyväksi käsitteitä "price support" ja "von Neumann facet". Ehkä osittain tästä syystä he eivät pystyneet täysin ratkaisemaan malliaan analyyttisesti. Myöhemmin Wan (1994) sovelsi dynaamista ohjelmointia ja pyrki yksinkertaistamaan asetelmaa olettamalla, että metsä koostuu vain kahdesta puuston ikäluokasta: nuoresta ja vanhasta. Sittemmin myös Salo ja Tahvonen (2002a) ovat esittäneet vastaavan mallin. Heidän muotoilussaan käytetään hyväksi ainoastaan Kuhn–Tucker-teoreemaa ja implisiittifunktioteoreemaa, joten jatkossa seurataan heidän esitystapaansa.

3.2.2 Kahden ikäluokan tapaus

Salon ja Tahvosen (2002a) mallissa metsä koostuu kahdesta puuston ikäluokasta, joiden pinta-alat periodilla t ennen hakkuuta ovat x_{1t} ja x_{2t}. Vanhempi ikäluokka hakataan aina jokaisen periodin lopussa, jolloin saadaan puumäärä x_{2t}. Nuoremman ikäluokan hakkuu tuottaa vastaavasti puumäärän az_t, jossa z_t on yhden periodin ikäisen metsän hakattu pinta-ala. Periodilla t hakataan $c_t = az_t + x_{2t}$, jossa c_t on puumäärän kulutus. Diskonttotekijä on $b = 1/(1+r)$, jossa r tarkoittaa yhden periodin diskonttokorkoa. Hyötyfunktio U oletetaan kasvavaksi ja aidosti konkaaviksi. Hyötyä saadaan tässäkin mallissa suoraan kulutetusta puumäärästä c_t.

Päätöksentekijän ongelma on maksimoida hyödyn nykyarvo, kun $x_{10} \geq 0$ ja $x_{20} \geq 0$ periodin 0 lopussa ennen päätehakkuita:

$$V(x_{10}, x_{20}) = \max \sum_{t=0}^{\infty} b^t U(c_t), \tag{3.9}$$

ehdolla, että

$$c_t = az_t + x_{2t}, \tag{3.10}$$

$$x_{1,t+1} = x_{2t} + z_t, \tag{3.11}$$

$$x_{2,t+1} = x_{1t} - z_t, \tag{3.12}$$

$$z_t \geq 0, \tag{3.13}$$

$$z_t - x_{1t} \leq 0. \tag{3.14}$$

Ehdon (3.11) mukaan nuoren ikäluokan pinta-alan periodilla $t+1$ pitää olla sama kuin edellisen periodin hakkuuala. Vastaavasti rajoitteen (3.12) mukaan vanhan ikäluokan pinta-ala periodilla $t+1$ on yhtä suuri kuin edellisellä periodilla hakkaamatta jätetyn nuoren metsän pinta-ala $x_{1t} - z_t$. Lisäksi vaaditaan, että nuoren metsän hakkuun pinta-ala on ei-negatiivinen (3.13) eikä ylitä kyseisen ikäluokan kokonaisalaa (3.14); nuoren metsän hakkuilla on siis ylä- ja alaraja. Ehto (3.14) rajoittaa pinta-alat x_{1t} ja $x_{2,t+1}$ ei-negatiivisiksi.

Maksimointitehtävässä (3.9)–(3.14) tavoitefunktio on aidosti konkaavi ja kaikki rajoitteet lineaarisia, joten välttämättömät ehdot ovat riittäviä. Lagrangen yhtälöksi saadaan

$$\begin{aligned} L \;=\; & \sum_{t=0}^{\infty} b^t U\left(az_t + x_{2t}\right) + \lambda_{1t}\left(x_{2t} + z_t - x_{1,t+1}\right) + \\ & \lambda_{2t}\left(x_{1t} - z_t - x_{2,t+1}\right) + p_t z_t + q_t(z_t - x_{1t}) \end{aligned} \tag{3.15}$$

ja optimin välttämättömiksi ehdoiksi

$$b^{-t}\partial L/\partial z_t = aU'(az_t + x_{2t}) + \lambda_{1t} - \lambda_{2t} + p_t + q_t = 0, \tag{3.16}$$

$$b^{-t}\partial L/\partial x_{1,t+1} = -\lambda_{1t} + b\lambda_{2,t+1} - bq_{t+1} = 0, \tag{3.17}$$

$$b^{-t}\partial L/\partial x_{2,t+1} = bU'(az_{t+1} + x_{2,t+1}) + b\lambda_{1,t+1} - \lambda_{2t} = 0, \tag{3.18}$$

$$p_t \geq 0, \qquad z_t \geq 0, \qquad p_t z_t = 0, \tag{3.19}$$

$$q_t \leq 0, \qquad z_t - x_{1t} \leq 0, \qquad q_t(z_t - x_{1t}) = 0, \tag{3.20}$$

joissa λ_{1t}, λ_{2t}, p_t ja q_t ovat Lagrangen kertoimia. Optimiratkaisu on olemassa, kun hyöty on rajoitettu ja $b < 1$ (ks. esim. Stokey ja Lucas 1989, 79).

Kertoimet λ_{1t} ja λ_{2t} kuvaavat nuoren ja vanhan metsän pinta-alan marginaalilisäyksien arvoa periodin $t+1$ alussa. Yhtälön (3.16) sisäpisteratkaisussa pätee, että nuoren metsän hakkaaminen tuottaa suoraan marginaalihyödyn aU' ja nuoren metsän pinta-alan lisääntymisestä koituvan arvon λ_{1t}. Vanhan metsän vähenemisestä aiheutuu vastaavasti kustannus λ_{2t}. Yhtälön (3.17) mukaan sisäpisteratkaisulle pätee edelleen, että marginaalinen yksikkö nuorta metsää on saman arvoinen kuin marginaalinen yksikkö vanhaa metsää yhtä periodia myöhemmin, ts. $\lambda_{1t} = b\lambda_{2,t+1}$. Yhtälö (3.18) puolestaan kertoo, että vanhan metsän arvo λ_{2t} on yhtä suuri kuin seuraavalla periodilla vanhan metsän hakkuusta saatavan marginaalihyödyn nykyarvon $bU'(az_{t+1}+x_{2,t+1})$ ja nuoren metsän hakkuun nykyarvon $b\lambda_{1,t+1}$ summa.

Yhtälöstä (3.16) saadaan $\lambda_{2t} = aU'(az_t + x_{2t}) + \lambda_{1t} + p_t + q_t$ ja sijoittamalla tämä yhtälöön (3.18) edelleen $bU'(c_{t+1}) + b\lambda_{1,t+1} - aU'(c_t) - \lambda_{1t} - p_t - q_t = 0$. Kun (3.16) kirjoitetaan muotoon $\lambda_{1,t+1} = -aU'(c_{t+1}) + \lambda_{2,t+1} - p_{t+1} - q_{t+1}$, saadaan

$$\begin{gathered} -aU'(c_t) + bU'(c_{t+1}) - abU'(c_{t+1}) + b\lambda_{2,t+1} - bp_{t+1} - \\ bq_{t+1} - \lambda_{1t} - p_t - q_t = 0. \end{gathered} \tag{3.21}$$

Lausekkeen (3.17) avulla voidaan eliminoida $-\lambda_{1t} + b\lambda_{2,t+1} - bq_{t+1}$ yhtälöstä (3.21). Olettaen, että metsän pinta-ala on yksi, ts. $x_{1t} + x_{2t} = 1 \; \forall t$, yhtälö (3.11) voidaan kirjoittaa muotoon $z_t = 1 - x_{2t} - x_{2,t+1}$ ja yhtälö (3.10) muotoon $c_t = a + (1-a)x_{2t} - ax_{2,t+1}$. Optimin välttämättömät ehdot voidaan nyt esittää tiivistetysti

$$\begin{gathered} -aU'\left[a + (1-a)x_{2t} - ax_{2,t+1}\right] + \\ b(1-a)U'\left[a + (1-a)x_{2,t+1} - ax_{2,t+2}\right] - p_t - bp_{t+1} - q_t = 0, \end{gathered} \tag{3.22}$$

$$q_t \leq 0, \qquad x_{2,t+1} \geq 0, \qquad x_{2,t+1}q_t = 0, \tag{3.23}$$

$$p_t \geq 0, \qquad 1 - x_{2t} - x_{2,t+1} \geq 0, \qquad p_t\left(1 - x_{2t} - x_{2,t+1}\right) = 0. \tag{3.24}$$

Koska $x_{2,t+1} = x_{1t} - z_t$, niin (3.23) on sama kuin (3.20) ja koska $z_t = 1 - x_{2t} - x_{2,t+1}$, niin (3.24) on sama kuin (3.19).

Faustmann-sykleistä. Seuraavaksi analysoidaan pitkän aikavälin tasapainon luonnetta kolmessa eri tapauksessa. Ensimmäisessä Faustmannin kiertoaika on joko yksi periodi tai kaksi periodia, toisessa tapauksessa se on yksi periodi ja kolmannessa se on kaksi periodia.

Päätöksentekijän ongelma (3.9)–(3.14) on maksimoida konkaavi funktio konveksissa joukossa, joten ehdot (3.22)–(3.24) riittävät takaamaan ratkaisun optimaalisuuden. Koska nuori ikäluokka x_{1t} ei esiinny näissä ehdoissa, voidaan kirjoittaa $x_t \equiv x_{2t}$ ja määritellä seuraavat kaksi metsänkäsittelytapaa:

$$\textbf{Metsänkäsittelytapa 1}: \quad z_t = 0, \quad 1 - x_t - x_{t+1} = 0, \quad x_{t+1} \geq 0,$$

$$\textbf{Metsänkäsittelytapa 2}: \quad z_t > 0, \quad 1 - x_t - x_{t+1} > 0, \quad x_{t+1} \geq 0.$$

Kun $z_t = 0$, vanhan ikäluokan pinta-ala periodilla $t+1$ (eli x_{t+1}) on sama kuin nuoren ikäluokan pinta-ala edellisellä periodilla t (eli $1 - x_t$). Vastaavasti kun $z_t > 0$, vanhan ikäluokan pinta-ala periodilla $t + 1$ on pienempi kuin nuoren ikäluokan pinta-ala periodilla t. Lisäksi on otettava huomioon, että nuoren metsän hakkuut eivät voi ylittää ikäluokan kokonaisalaa, so. vanhan metsän pinta-alan periodilla $t + 1$ täytyy olla ei-negatiivinen.

Olkoon $\mathbf{x} = (x_t)_{t=0}^{\infty}$ optimaalinen jono alkutilasta x_0. Tämän täytyy olla ainoa optimaalinen jono, sillä jos olisi olemassa $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{x}'$, niin myös niiden konveksi kombinaatio olisi mahdollinen ja tuottaisi aidosti konkaavin hyötyfunktion U tapauksessa suuremman hyödyn kuin $\mathbf{x}$. Jatkossa huomataan, että mallin tuottamat optimiratkaisut voivat olla stationaarisia tiloja, joissa x_t tai c_t on vakio, mutta ne voivat olla myös stationaarisia syklejä tai Faustmann-syklejä. Olkoon K optimaalisten stationaaristen syklien tuottamien tilojen joukko. Määritelmän mukaan, jos $x_k \in K$ jollakin $k \geq 0$, niin $x_t \in K \ \ \forall t > k$.

Edellisen perusteella saadaan kolme tapausta: Faustmannin kiertoajan pituus on yksi periodi, kaksi periodia tai molemmat periodit tuottavat saman paljaan maan arvon. Jatkossa on syytä muistaa, että $\sum_{i=1}^{\infty} b^{2i} = b^2/(1-b^2)$ ja $\sum_{i=1}^{\infty} b^i = b/(1-b)$.

TAPAUS 1: Faustmannin kiertoaika on joko yksi tai kaksi periodia eli $ba/(1-b) = b^2/(1-b^2) \Leftrightarrow a = (1-a)b$. Kun $x_0 \leq \frac{1}{2}$, jono $x_t = x_0$, jossa $z_t = 1 - 2x_0$, $p_t = q_t = 0 \ \forall t$, toteuttaa yhtälön (3.22), joka voidaan esittää muodossa $-aU'\left[a + (1-a)x_0 - ax_0\right] + aU'\left[a + (1-a)x_0 - ax_0\right] = 0$. Koska $x_0 \leq \frac{1}{2}$, ratkaisu toteuttaa ehdot (3.23) ja (3.24), joten sen täytyy olla optimaalinen. Jos $x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$, ratkaisu $x_1 = 1 - x_0$, $z_0 = 0$, $q_t = 0$, $p_0 = a\left[U'(x_1 + az_1) - U'(x_0)\right] > 0$, ja $x_t = 1 - x_0$, $z_t = 1 - 2(1 - x_0)$, $p_t = 0$, $t \geq 1$, toteuttaa kaikki välttämättömät ehdot ja on siten optimaalinen.

Kun $x_0 \leq \frac{1}{2}$, metsän alkuperäinen tila voidaan säilyttää ikuisesti. Olettaen, että yksi ja kaksi periodia ovat samanarvoisia Faustmannin kiertoaikoja, metsän alkuperäistä tilaa ei kannata muuttaa, joten kulutus on vakio. Jos alunperin $x_0 > \frac{1}{2}$, niin alkuperäinen hakkuu on "epäoptimaalisen" suuri ja

$z_0 = 0$ ja $p_0 > 0$. Seuraavalla periodilla kuitenkin $x_1 < \frac{1}{2}$, ja tämä tila yhdessä vakioisen kulutuksen kanssa kannattaa säilyttää ikuisesti. Näin ollen stationaarinen tila on maa-allokaatioiden jatkumo ja $K = \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Normaalimetsä on pitkän aikavälin tasapaino vain silloin, kun $x_0 = \frac{1}{2}$ tai $x_0 = 0$.

TAPAUS 2: Faustmannin kiertoajan pituus on yksi periodi eli $ba/(1-b) > b^2/(1-b^2) \Leftrightarrow a > (1-a)b$. Optimaalinen stationaarinen ratkaisu on $x_t = 0\ \forall t$, koska $x_t = 0$, $z_t = 1$, $p_t = 0$ ja $q_t \leq 0\ \forall t$ toteuttaa ehdot (3.22)–(3.24). Jos stationaarinen tila saavutettaisiin asymptoottisesti, niin $x_t > 0$ $\forall t \geq 0$. Tällöin rajoituksen (3.22) täytyisi toteutua, kun $q_t = 0\ \forall t$, jolloin ehdon (3.24) perusteella saataisiin $-aU'(c_t) + b(1-a)U'(c_{t+1}) = p_t + bp_{t+1} \geq 0$. Koska $a > (1-a)b$, saataisiin edelleen $U'(c_t) < U'(c_{t+1})$. Mutta silloin $U'(c_t)$ kasvaisi rajatta ja samaan aikaan $c_t \to 0$. Syntynyt ristiriita osoittaa, että stationaarinen tila $K = \{0\}$ täytyy saavuttaa äärellisen ajan kuluessa.

TAPAUS 3: Faustmannin kiertoajan pituus on kaksi periodia eli $ba/(1-b) < b^2/(1-b^2) \Leftrightarrow a < (1-a)b$. Tarkastellaan taas aluksi stationaarista ratkaisua. Koska $c_t = a + (1-a)x_t - ax_{t+1}$, vakioinen x_t tarkoittaa sitä, että myös c_t on vakio. Kun $a < (1-a)b$, yhtälöstä (3.22) saadaan $-aU' + b(1-a)U' > 0 = p_t + bp_{t+1} \geq 0$, joka puolestaan tarkoittaa yhtälön (3.24) perusteella ja x_t:n ollessa vakio, että $p_t > 0$ ja metsänkäsittelytapaa $z_t = 0$ sovelletaan $\forall t$. Koska $1 - x_t - x_t = 0$, niin $x_t = \frac{1}{2}$, ts. stationaarinen tila on normaalimetsä. On selvää, että jos $x_t \neq \frac{1}{2}$, stationaarinen tila voidaan saavuttaa ainoastaan metsänkäsittelytavalla $z > 0$. Ennen kuin siirrytään tutkimaan erilaisia lähestymisuria, analysoidaan, toteuttaako metsänkäsittelytapa $z = 0$ optimaaliset ehdot jossakin ratkaisun $x_t = \frac{1}{2}$ läheisyydessä, mikä viittaisi stationaaristen tilojen syklisyyteen. Olkoon $\phi \geq 0$ syklin maksimisäde ja $x \in \left[\frac{1}{2} - \phi, \frac{1}{2} + \phi\right]$.

LAUSE 1. *Jos $a < (1-a)b$ ja $x_0 \in \left[\frac{1}{2} - \phi, \frac{1}{2} + \phi\right]$, optimaalinen ratkaisu on syklinen stationaarinen ratkaisu metsänkäsittelytavassa $z_t = 0\ \forall t$.*

Todistus. Metsänkäsittelytavassa $z_t = 0$ pätee, että $x_{t+1} = 1 - x_t$ ja että periodien t ja $t+1$ hakkuut ovat x_t ja $1 - x_t$. Yhtälön (3.22) perusteella voidaan päätellä, että sisäpisteratkaisuissa $x_t \in (0,1)$ ja $q_t = 0$ on voimassa

$$bp_{t+1} + p_t = -aU'(x_t) + b(1-a)U'(1-x_t), \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned} bp_{t+2} + p_{t+1} &= -aU'(x_{t+1}) + b(1-a)U'(1-x_{t+1}) \\ &= -aU'(1-x_t) + b(1-a)U'(x_t). \end{aligned} \tag{3.26}$$

Kun termi p_{t+1} eliminoidaan, yhtälö (3.26) voidaan kirjoittaa muotoon

$$p_t - b^2 p_{t+2} = -\left[a + (1-a)b^2\right] U'(x_t) + bU'(1-x_t). \tag{3.27}$$

Koska syklin pituuden tulee olla kaksi periodia ja $p_t = p_{t+2}$, yhtälöistä (3.27) ja (3.25) saadaan

$$p_t = -U'(x_t)\left[a + (1-a)b^2\right]/(1-b^2) + U'(1-x_t)b/(1-b^2), \tag{3.28}$$

$$p_{t+1} = -U'(x_{t+1})\left[a + (1-a)b^2\right]/(1-b^2) + U'(1-x_{t+1})b/(1-b^2). \quad (3.29)$$

Yhtälön (3.28) ja $p_t \geq 0\ \forall t$ perusteella metsänkäsittelytavan $z = 0$ tulee siis toteuttaa $\forall t$:

$$U'(x_t)/U'(1-x_t) \leq b/\left[a + (1-a)b^2\right] \equiv \eta. \quad (3.30)$$

Koska U' on aidosti konkaavi, $U'(x_t)/U'(1-x_t)$ on x_t:n suhteen aidosti vähenevä funktio ja $U'(x_t)/U'(1-x_t) > 1$, kun $x_t < \frac{1}{2}$. Koska $a < (1-a)b$ ja edelleen $b/\left[a + (1-a)b^2\right] > 1$, niin $x_t = \frac{1}{2}$:n lähistöllä täytyy olla olemassa sellaisia syklisiä ratkaisuja, jotka toteuttavat epäyhtälön lausekkeessa (3.30). Syklisen ratkaisun suurin mahdollinen säde $\phi = \frac{1}{2}$, jos $U'(0)/U'(1) \leq \eta$; muussa tapauksessa se voidaan implisiittisesti määrittää yhtälöstä

$$U'(\frac{1}{2} - \phi)/U'(\frac{1}{2} + \phi) = b/\left[a + (1-a)b^2\right] = \eta. \quad (3.31)$$

Muuttuja ϕ kuvaa siis suurinta mahdollista, välttämättömät ehdot toteuttavaa poikkeamaa normaalimetsästä.

Reunaratkaisussa $x_t = 1$, $x_{t+1} = 0$, $x_{t+2} = 1, \ldots$ yhtälöstä (3.22) saadaan $bp_{t+1} + p_t \geq -aU'(1) + b(1-a)U'(0)$ ja $bp_{t+2} + p_{t+1} \geq -aU'(0) + b(1-a)U'(1)$. Koska $p_t = p_{t+2}$, termi p_t voidaan eliminoida, jolloin saadaan $0 \leq p_{t+1} \leq \left\{bU'(1) - \left[a + b^2(1-a)\right]U'(0)\right\}/(1-b^2)$, joka on sama kuin $U'(0)/U'(1) \leq \eta$. Siten $x_t \in \left[\frac{1}{2} - \phi, \frac{1}{2} + \phi\right]$ on välttämätön ja riittävä ehto syklisille ratkaisuille. Näin tuli osoitetuksi, että kun $a < (1-a)b$ ja $x_0 \in \left[\frac{1}{2} - \phi, \frac{1}{2} + \phi\right]$, metsäkäsittelytapa $z_t = 0\ \forall t$ toteuttaa ehdot (3.22)–(3.24) ja on siten optimaalinen.

Salon ja Tahvosen (2002a) yhtälöstä (3.31) johtamien komparatiivis-staattisten tulosten mukaan normaalimetsän ympärillä olevan syklin säde riippuu puuston kasvua kuvaavasta parametrista a, diskonttotekijästä b ja hyötyfunktion U muodosta. Syklin säde pienenee muun muassa silloin, kun puuston kasvu alenee tai korko lähestyy nollaa, koska tällöin ikärakenteen tasoittamisen marginaalikustannus pienenee.

Lopuksi Salo ja Tahvonen (2002a) osoittivat analyyttisesti, että optimiratkaisu todella konvergoi stationaaristen syklien joukkoon K, kun $x_0 \notin K$, $K = \left[\frac{1}{2} - \phi, \frac{1}{2} + \phi\right]$ ja $0 < \phi < \frac{1}{2}$.

Tulosten tulkinta. Salon ja Tahvosen (2002a) tulosten talousteoreettinen tulkinta on varsin intuitiivinen. Tasaisen ikärakenteen saavuttaminen edellyttää sitä, että osa metsästä hakataan ennen Faustmannin kiertoaikaa. Koska aika on diskreetti muuttuja ja diskonttokorko positiivinen, ikärakenteen tasoittamisen marginaalikustannus on aina positiivinen. Metsämaa sen sijaan on jatkuva muuttuja, minkä vuoksi tullaan lopulta tilanteeseen, jossa "viimeisen" metsämaayksikön hakkaaminen yhtä periodia ennen Faustmannin kiertoaikaa tuottaa äärettömän pienen marginaalihyödyn. Tämän takia ikäluokkien hakkaaminen ennen Faustmannin kiertoaikaa ei enää kannata, vaan hakkuissa säilyy sykli.

On huomionarvoista, että edellä esitetty tulkinta on täsmälleen sama kuin mihin muun muassa Hannikainen (1896), Ericsson (1903), Lindholm (1909) ja Lönnroth (1920) aikanaan päätyivät metsällisen tietämyksensä ja intuitionsa pohjalta. Hehän esittivät, että metsikkötalouden ja tasaisuusvaatimuksen välillä on tasapainoiltava. Wan (1994) sen sijaan tulkitsi syklien aiheutuvan *cross vintage* -rajoitteesta, jonka mukaan vanhan metsän pinta ala periodilla $t + 1$ ei voi olla suurempi kuin nuoren metsän pinta-ala edellisellä periodilla, ts. $x_{2,t+1} \leq x_{1t}$. Kyseisen rajoitteen poistaminen johtaa normaalimetsän ympärillä olevan syklin katoamiseen, mutta samalla malli yksinkertaistuu siten, että se vastaa Ramseyn (1928) kasvumallia (Wan 1989a, b, 1993).

Mielivaltainen määrä ikäluokkia. Edellä osoitettiin optimiratkaisun syklisyys ja konvergenssi, kun aika on diskreetti ja metsässä on kaksi ikäluokkaa. Entä mikä on ratkaisun luonne, kun ikäluokkia onkin n kappaletta? Mitra ja Wan (1985) tekivät päätelmiä pitkän aikavälin tasapainon syklisyydestä n ikäluokan tapauksessa vain kahden numeerisen esimerkin perusteella, mutta Salo ja Tahvonen (2002b) osoittivat saman asian analyyttisesti. Lisäksi he osoittivat ratkaisun konvergoitumisen sykliin numeerisesti.

Salon ja Tahvosen (2002b) malliin liittyy mielenkiintoinen lisäpiirre: kun periodin pituus lähestyy nollaa, syklit katoavat. Tällöin metsän ikäluokkia on kuitenkin ääretön määrä, joka voi olla ainakin pohjoisella havumetsävyöhykkeellä vaikeasti tulkittava kuvaus metsästä ja metsätaloudesta. Trooppisten sademetsien kohdalla tulos lienee luontevampi. Keskeinen kysymys normaalimetsän optimaalisuuden kannalta näyttäisi siis olevan se, voidaanko metsävarojen käyttöön (esim. puunkorjuuseen) katsoa liittyvän jonkinlaista kausiluonteisuutta.

3.2.3 Metsämaalla vaihtoehtoisia käyttömuotoja

Edellä esitetyt metsän ikäluokkamallit ovat melkoisia yksinkertaistuksia todellisuudesta. Salo ja Tahvonen (2002a) pyrkivät lisäämään mallien realistisuutta olettamalla, että paljaalla metsämaalla on vaihtoehtoisia käyttömuotoja. Tätä voidaan pitää olennaisena laajennuksena, koska metsämaata voidaan toisinaan käyttää esimerkiksi maataloudessa.

Salon ja Tahvosen (2002a) mallissa oletetaan, että metsämaan vaihtoehtoisesta käytöstä saadaan jokaisella periodilla hyöty $W(y_t)$, jossa W on kasvava ja konkaavi funktio. Vaihtoehtoiseen käyttöön allokoidun maan pinta-ala on $y_t = 1 - x_{1t} - x_{2t}$, ts. metsässä on kaksi ikäluokkaa. Ehdon (3.11) mukaan hakkuualalle istutetaan aina uusi metsä, mutta uudessa mallissa näin ei välttämättä tarvitse tehdä. Uuden ehdon $x_{t,t+1} \leq x_{2t} + z_t + 1 - x_{1t} - x_{2t}$ mukaan istutusala ei voi ylittää hakatun ja vaihtoehtoisen maankäyttömuodon pinta-alojen summaa.

Nuoren metsän hakkuu z_t voidaan eliminoida yhtälöllä (3.12), jolloin istutetun maapinta-alan ylärajaa koskeva ehto supistuu muotoon $x_{t,t+1} \leq 1 - x_{2,t+1}$. Eliminoimalla z_t yhtälöistä (3.13) ja (3.14) saadaan rajoitukset $x_{1t} \geq x_{2,t+1}$ ja $x_{2,t+1} \geq 0$. Lisäksi vaaditaan, että $x_{1t} \geq 0$.

Optimaalisia hakkuita ja maa-allokaatiota koskeva ongelma voidaan nyt kirjoittaa muotoon

$$V(x_{10}, x_{20}) = \max \sum_{t=0}^{\infty} b^t \left[U(c_t) + W(1 - x_{1t} - x_{2t})\right], \tag{3.32}$$

ehdolla, että

$$c_t = x_{2t} + a(x_{1t} - x_{2,t+1}), \tag{3.33}$$

$$x_{2,t+1} \leq x_{1t}, \tag{3.34}$$

$$x_{1,t+1} + x_{2,t+1} \leq 1, \tag{3.35}$$

$$x_{1,t+1},\ x_{2,t+1} \geq 0. \tag{3.36}$$

Päätöksentekijän ongelma on valita aina seuraavan periodin maa-allokaatio nuoren ja vanhan metsän sekä metsämaan vaihtoehtoisen käyttömuodon välillä. Epäyhtälö (3.34) kertoo, että vanhan metsän pinta-ala periodilla $t+1$ ei voi ylittää nuoren metsän alaa edellisellä periodilla ja että kyseisten pinta-alojen erotus on sama kuin nuoren metsän hakkuuala periodilla t. Vastaavasti ehdon (3.35) mukaan nuoren ja vanhan metsän yhteenlaskettu pinta-ala periodilla $t+1$ ei voi ylittää kokonaismaa-alaa. Lisäksi kyseinen ehto kertoo, että nuoren ja vanhan metsän pinta-alojen erotus on metsämaan vaihtoehtoisen käyttömuodon pinta-ala. Metsän kokonaispinta-ala voi lisääntyä tai vähentyä, kehityksen suunta riippuu epäyhtälöstä $x_{1,t+1} \gtreqless x_{2t} + x_{1t} - x_{2,t+1}$ $(= x_{2t} + z_t)$.

Lagrangen yhtälöksi saadaan

$$\begin{aligned} L = \textstyle\sum_{t=0}^{\infty} b^t \big[&U(c_t) + W(1 - x_{1t} - x_{2t}) + p_t\,(x_{1t} - x_{2,t+1}) + \\ &\lambda_t(1 - x_{1,t+1} - x_{2,t+1})\big], \end{aligned} \tag{3.37}$$

ja optimin välttämättömiksi ehdoiksi

$$b^{-t}\partial L/\partial x_{1,t+1} = abU'(c_{t+1}) - bW'\,(1 - x_{1,t+1} - x_{2,t+1}) + bp_{t+1} - \lambda_t \leq 0, \tag{3.38}$$

$$\begin{aligned} b^{-t}\partial L/\partial x_{2,t+1} = -aU'(c_t) + bU'(c_{t+1}) - bW'\,(1 - x_{1,t+1} - x_{2,t+1}) - \\ p_t - \lambda_t \leq 0, \end{aligned} \tag{3.39}$$

$$x_{i,t+1} \geq 0, \qquad (\partial L/\partial x_{i,t+1})\, x_{1,t+1} = 0, \qquad i = 1, 2, \tag{3.40}$$

$$p_t \geq 0, \qquad p_t(x_{1t} - x_{2,t+1}) = 0, \tag{3.41}$$

$$\lambda_t \geq 0, \qquad \lambda_t\,(1 - x_{1,t+1} - x_{2,t+1}) = 0. \tag{3.42}$$

Analyysi jatkuu periaatteessa samalla tavalla kuin edellä kahden ikäluokan tapauksessa, mutta lopputulos on erilainen. Kun osa metsämaasta allokoidaan maatalouteen, hakkuiden syklisyys katoaa ja normaalimetsä osoittautuu (positiivista korkokantaa sovellettaessa) optimaaliseksi pitkän aikavälin tasapainoksi. Tulos johtuu siitä, että paljasta metsämaata voidaan siirtää – oletuksen mukaan ilman kustannuksia – väliaikaisesti maatalouteen ja toisaalta ottaa sieltä tarpeen mukaan takaisin metsätalouskäyttöön siten, että metsän ikäluokkajakaumasta on optimaalista kehittää tasainen.

Maapohjan pitkän aikavälin optimaalinen allokaatio metsätalouden ja vaihtoehtoisen käyttömuodon välillä – ja siten myös normaalimetsän pinta-ala – riippuu maan marginaaliarvosta kummassakin käyttömuodossa. Optimissa luonnollisesti pätee, että vaihtoehtoiseen käyttöön, esimerkiksi maatalouteen, allokoitu marginaalinen maayksikkö tuottaa saman nettonykyarvon kuin viimeinen metsätalouteen allokoitu maayksikkö.

Käytännössä maa-allokaatioon vaikuttavat U, W ja r. Kun Faustmannin kiertoaika on kaksi periodia, koron nouseminen vähentää metsätalouteen allokoitua maapinta-alaa, koska maataloudesta saadaan satoa jokaisella periodilla, mutta metsätaloudessa vain joka toisella. Maan siirtymistä metsätalouden ulkopuolelle toisaalta hidastaa se, että koron noustessa metsän optimaalinen kiertoaika lyhenee, jolloin puun tarjonta vähenee ja hinta nousee. Tämä tekee metsätalouden harjoittamisen aikaisempaa kannattavammaksi suhteessa maatalouteen.

Mielivaltainen määrä ikäluokkia. Salo ja Tahvonen (2002c) ovat myöhemmin yleistäneet vastaavan, endogeenista maa-allokaatiota metsätalouden ja muun käyttömuodon välillä kuvaavan mallin tilanteeseen, jossa metsässä on n ikäluokkaa. He osoittivat analyyttisesti, että normaalimetsä on optimaalinen pitkän aikavälin tasapaino ja että optimiratkaisu konvergoi normaalimetsään myös tässä tilanteessa, jos osa metsämaasta allokoidaan muuhun käyttömuotoon.

Tilanne on kuitenkin toinen, jos maankäyttömuodon vaihtamisesta aiheutuu symmetrisiä kustannuksia ja yksikkökustannuskäyrä on lineaarinen maa-alan suhteen. Tällöin päädytään jälleen sykliseen ratkaisuun, jossa metsämaan optimaalinen allokaatio eri käyttömuotojen välillä riippuu metsän alkutilasta ja maan alkuallokaatiosta.

3.2.4 Metsämaan viljavuuden vaihtelu

Kaikissa edellä mainituissa Faustmannin mallin laajennuksissa metsämaa oletettiin laadultaan ja puuntuotoskyvyltään homogeeniseksi. Salo ja Tahvonen (2002d) ovat tutkineet realistisempaa tilannetta, jossa puuston kasvu vaihtelee metsämaan viljavuuden mukaan. Mallissa voi olla mikä tahansa määrä puuston ikäluokkia ja metsämaan boniteetteja (viljavuusluokkia). Aika on diskreetti ja maa-ala jatkuva muuttuja.

Mallissa metsämaa koostuu boniteeteista $i = 1, ..., h$. Metsikön ikäluokkaa kuvaa s, $s = 1, ..., n$, jossa n on jokin äärellinen periodi. Sen jälkeen puusto muuttuu taloudellisessa mielessä arvottomaksi. Merkintöjen yksinkertaistamiseksi n oletetaan samaksi kaikilla boniteeteilla. Termi x_{ist} kuvaa ikäluokkaan s periodilla t allokoitua boniteetin i maapinta-alaa. Vastaavasti z_{ist} kuvaa kussakin viljavuus- ja ikäluokassa tapahtuvan hakkuun pinta-alaa periodin t lopussa. Puuston tilavuutta (pinta-alayksikköä kohti) boniteetilla i ja ikäluokassa s merkitään termillä f_{is}. Lisäksi oletetaan, että $0 \leq f_{i1} \leq ... \leq f_{in}$, $i = 1, ..., h$. Kun diskonttotekijää merkitään b:llä, Faustmannin kiertoaika boniteetilla i on m_i, jossa $0 \leq m_i \leq n$ ja

$$b^{m_i} f_{m_i}/(1 - b^{m_i}) \geq b^s f_{is}/(1 - b^s), \text{ jossa } s = 1, ...n, \ i = 1, ..., \ h. \tag{3.43}$$

Kullakin boniteetilla i pätee maa-alalle rajoite $\sum_{s=1}^{n} x_{ist} = 1$. Lisäksi oletetaan, että hakkuista (kulutuksesta) välittömästi saatava hyöty on $U(c_t)$, jossa U on jatkuva, kahdesti differentioituva, kasvava ja aidosti konkaavi hyötyfunktio ja c_t kulutus periodilla t.

Merkintöjen yksinkertaistamiseksi olkoon $S \in R^n$ yksikkösimpleksi, ts.

$$S = \left\{ \mathbf{x} \in R^n \mid \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \ \sum_{s=1}^{n} x_s = 1 \right\}.$$

Olkoon edelleen $\mathbf{x}_{it} = (x_{i1t}, ..., x_{int})$ boniteetin i, $i = 1, ..., h$ ikäluokkarakenne ja $\mathbf{x}_t = (\mathbf{x}_{1t}, ..., \mathbf{x}_{ht})$ kaikkien boniteettien ikäluokkarakennetta kuvaava vektori. Merkitään hakkuualaa kuvaavia vektoreita vastaavasti $\mathbf{z}_{it} = (z_{i1t}, ..., z_{int})$, $\mathbf{z}_t = (\mathbf{z}_{1t}, ..., \mathbf{z}_{ht})$ ja $\mathbf{z} = (\mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1, ...)$.

Päätöksentekijän tehtävänä on maksimoida hakkuista saatavan hyödyn nykyarvo, kun metsämaan alkuperäinen allokaatio on $\mathbf{x}_{i0}$, $i = 1, ..., h$. Ongelma voidaan kirjoittaa muotoon

$$v(\mathbf{x}_0) = \max_{\{\mathbf{z}\}} \sum_{t=0}^{\infty} b^t U(c_t) \tag{3.44}$$

ehdolla, että

$$c_t = \sum_{i=1}^{h} \sum_{s=1}^{n} f_{is} z_{ist}, \tag{3.45}$$

$$x_{i,s+1,t+1} = x_{ist} - z_{ist}, \quad s = 1, ..., n-1, \quad i = 1, ..., h, \tag{3.46}$$

$$\mathbf{z}_t \geq \mathbf{0}, \tag{3.47}$$

$$\mathbf{x}_{it} \in S, \ i = 1, ..., h, \tag{3.48}$$

$$z_{int} = x_{int}, \ i = 1, ..., h, \tag{3.49}$$

kaikilla $t = 0, 1, ...,$ jossa alkuperäiset maa-allokaatiot toteuttavat $\mathbf{x}_{i0} \in S$, $i = 1, ..., h$. Kun $h = 1$, ongelma (3.44)–(3.49) yksinkertaistuu vastaamaan Mitran ja Wanin (1985) esittämää.

Muuttuja c_t voidaan eliminoida yhtälöllä (3.45), muuttuja x_{i1t} yhtälöllä (3.48) ja muuttuja z_{ist} yhtälöillä (3.46) ja (3.49). Rajoite $z_{ist} \geq 0$ voidaan nyt kirjoittaa muotoon $x_{i,s+1,t+1} \leq x_{ist}$, $s = 1, ..., n-1$, $i = 1, ..., h$. Lagrangen yhtälöksi saadaan

$$L = \sum_{t=0}^{\infty} b^t \left[U(c_t) + \sum_{i=1}^{h} \sum_{s=1}^{n-1} p_{i,s+1,t} \left(x_{ist} - x_{i,s+1,t+1} \right) \right] \tag{3.50}$$

ja optimin välttämättömiksi ehdoiksi kaikilla $i = 1, ..., h$, $t = 0, 1, ...$

$$\begin{aligned} b^{-t} \partial L / \partial x_{i,s+1,t+1} \quad = \quad & -f_{is} U'(c_t) + b(f_{i,s+1} - f_{i1}) U'(c_{t+1}) + \\ & b(p_{i,s+2,t+1} - p_{i,2,t+1}) - p_{i,s+1,t} \leq 0, \quad s = 1, ..., n-2, \end{aligned} \tag{3.51}$$

$$\begin{aligned} b^{-t} \partial L / \partial x_{i,n,t+1} = & -f_{i,n-1} U'(c_t) + b(f_{in} - f_{i1}) U'(c_{t+1}) - \\ & b p_{i,2,t+1} - p_{int} \leq 0, \end{aligned} \tag{3.52}$$

$$x_{i,s,t+1} b^{-t} \partial L / \partial x_{i,s,t+1} = 0, \quad s = 2, ..., n, \tag{3.53}$$

$$p_{i,s+1,t} \geq 0, \quad p_{i,s+1,t} (x_{ist} - x_{i,s+1,t+1}) = 0, \quad s = 1, ..., n-1, \tag{3.54}$$

joissa p_{ist} ovat Lagrangen kertoimia $i = 1, ..., h$, $s = 1, ..., n$, $t = 0, 1, ...$ Optimaalinen hakkuuohjelma on olemassa, kun hyöty on rajoitettu ja $b < 1$ (Stokey ja Lucas 1989, 79). Mitra ja Wan (1986) osoittivat sen olemassaolon, kun maa on homogeenista, hyöty rajoitettu ja $b = 1$.

Salo ja Tahvonen (2002d) tarkastelivat analyyttisesti ja numeerisesti, johtaako edellä esitetty useita puuston ikäluokkia ja metsämaan boniteetteja (viljavuusluokkia) sisältävä malli tasaisiin hakkuisiin ja normaalimetsään pitkällä aikavälillä. Lopputulos riippuu oleellisesti siitä, onko korko positiivinen.

Jos diskonttausta ei tehdä, kulutus tasoittuu ajan kuluessa, mutta millekään yksittäiselle boniteetille ei synny normaalimetsää kuin sattumalta. Eri boniteeteilla tehtävät hakkuut kuitenkin korvaavat toisiaan siten, että koko metsän hakkuumäärä tasoittuu ajan kuluessa. Tosin tulos edellyttää sitä, että eri boniteeteilla tehtävät (vanhimpien ikäluokkien) hakkuut ovat täydellisiä substituutteja keskenään, ts. hakattavan puutavaran laadussa ei ole eroja boniteettien välillä. Jos tulevat nettotulot diskontataan, lopputulos on oleellisesti toisenlainen: kulutus ja hakkuut eivät tasoitu, vaan normaalimetsän ympärille syntyy stationaaristen syklien jatkumo. Syklin rakenne riippuu metsän alkuperäisestä ikäluokkajakaumasta.

3.3 Point-input, flow-output -malli

Metsän ikäluokkamallista on esitetty myös hieman erilainen sovellus, niin sanottu hedelmätarhamalli, (Mitra ym. 1991). Siinä oletetaan, että hedelmätarhaan sitoutuneesta pääomasta saadaan tuottoa, hedelmiä, joka vuosi puun kuolemaan asti ja että tuotto on funktio puun iästä. Lopulta puut kuolevat ja niiden tilalle pitää istuttaa uusia. Päätöksentekijän ongelma on ratkaista hedelmätarhan puiden optimaalinen ikärakenne pitkällä aikavälillä.

Pääomasta saadaan tuottoa periaatteessa jatkuvasti (tai ainakin joka vuosi). Siten ongelman luonne on hieman erilainen kuin alkuperäisessä ikäluokkamallissa, jossa puustoon ja maapohjaan sitoutuneen pääoman tuotto realisoidaan yhdellä kertaa kiertoajan lopussa (*point-input, point-output*).

Point-input, flow-output -tyyppisellä hedelmätarhamallilla on useita mielenkiintoisia sovelluskohteita. Sen avulla voidaan analysoida esimerkiksi sitä, millaista tuotantokoneistoa taloudenpitäjän – yrityksen tai kansantalouden – on optimaalista ylläpitää ajan kuluessa ja milloin sitä kannattaa uusia. Mallia ei tässä yhteydessä kuitenkaan esitetä, koska se ei liity – ainakaan pohjoisella havumetsävyöhykkeellä, jossa metsänkäsittely perustuu tasaisen ikärakenteen syntymistä edistäviin alaharvennuksiin – normaalimetsän optimaalisuuteen yhtä läheisesti kuin edellä esitetyt ikäluokkamallit.

4 METSÄN IKÄLUOKKAMALLI JA YMPÄRISTÖARVOSTUKSET

4.1 Taustaa

Viimeisen vuosikymmenen aikana metsien käyttöä koskevat tavoitteet ovat oleellisesti monipuolistuneet ja myös yhteiskunta on asettanut entistä tiukempia ympäristövaatimuksia metsien käsittelylle. Tutkimusten mukaan tällä hetkellä jo yli puolet metsänomistajista korostaa taloudellisten tavoitteiden ohella metsien aineettomia hyötyjä (Karppinen ym. 2002, 36–37, 61). Tätä taustaa vasten on selvää, että metsiin liittyvien markkinattomien ympäristö- ja tunnearvostusten, niin sanottujen *in situ* -arvostusten, huomioon ottaminen laajentaisi metsän ikäluokkamallien käyttökelpoisuutta huomattavasti.

Bowes ja Krutilla (1985) muotoilivat tämänkaltaisen mallin olettamalla, että metsän *in situ* -arvostus riippuu kullakin ajanhetkellä sen ikäluokkarakenteesta. Lisäksi he olettivat, että hakkuista saatava hyöty riippuu epälineaarisesti kaikissa metsän ikäluokissa tehtävien hakkuiden yhteismäärästä. Nämä oletukset tarkoittavat käytännössä sitä, että metsiköiden välinen separaatio rikkoutuu, eikä tilannetta siten voida analysoida klassisilla Faustmannin (1849) tai Hartmanin (1976) malleilla.

Bowes ja Krutilla pyrkivät ratkaisemaan muotoilemansa maksimointiongelman dynaamisen ohjelmoinnin avulla. Myöhemmin on kuitenkin katsottu, että heidän esittämänsä ratkaisut ja numeeriset laskelmat olivat puutteellisia ja monella tapaa ongelmallisia (Tahvonen 2002). Numeerisissa laskelmissa muun muassa oletettiin, että hyötyfunktio on lineaarinen (tai kantohinta eksogeeninen) ja että metsä koostuu kahdeksasta ikäluokasta, joita ei voi jakaa osiin. Lisäksi optimin välttämättömiä ehtoja analysoitaessa siirryttiin diskreetistä jatkuvaan aikaan ilman, että olisi muodostettu viivästettyjä differenssiyhtälöitä, vaikka ainakin Heapsin (1984) mukaan ne liittyvät olennaisesti ongelman ratkaisuun.

Ympäristöhyötyjen kuvaamisesta. Talousteoreettisissa tutkimuksissa metsään liittyviä ympäristöhyötyjä on tyypillisesti kuvattu funktiolla $A(s)$, jossa s on puuston ikä. Lisäksi on oletettu, että $A(0) = 0$, $A' > 0$ ja $A'' \leq 0$. Näin ovat menetelleet – ilmeisesti paljolti Hartmanin (1976) metsikkömallin johdattamana – muun muassa Strang (1983), Snyder ja Bhattacharyya (1990), Tahvonen (1999) sekä Koskela ja Ollikainen (2001a). Toisinaan metsän ympäristöhyötyjä on kuvattu myös funktiolla $A(k)$, jossa k on pystypuuston tilavuus (esim. Clark 1990, Tahvonen 1998, Koskela ja Ollikainen 1999, Amacher ym. 2002). Jos k on funktio vain puuston iästä, edellä esitetyillä muotoiluilla ei ole oleellista eroa. Tilanne on kuitenkin toinen, jos esimerkiksi harvennushakkuut otetaan huomioon, koska tällöin pystypuuston tilavuuteen vaikuttavat muutkin tekijät kuin puuston ikä.

Metsän ympäristöhyötyjä kuvaava funktio A on lähes poikkeuksetta oletettu monotonisesti kasvavaksi puuston iän tai tilavuuden suhteen. Oletuksen taustalla ovat olleet lähinnä mallien matemaattiseen ratkaisemiseen liittyvät näkökohdat (ks. Swallow ym. 1990). Empiiristen tutkimusten mukaan monotoonisuusoletus ei kuitenkaan välttämättä pidä paikkaansa, vaan funktion $A(s)$ ominaisuudet näyttäisivät riippuvan suuresti tarkasteltavasta ympäristöhyödykkeestä (esim. Calish ym. 1978). Tämä tarkoittaa käytännössä sitä, että funktion A ominaisuuksien kokonaisvaltainen arviointi edellyttäisi eri ympäristöhyödykkeiden keskinäistä arvottamista, mikä on kuitenkin erittäin vaikea ja laaja-alainen tehtävä.

Tarkoituksenmukaisempi muotoilu metsikkötasolla voisi olla se, että ympäristöhyötyjen oletetaan riippuvan sekä puuston iästä että tilavuudesta. Siten ympäristöhyötyjä kuvaava funktio olisi muotoa $A(s, k)$. Kuvauksen realistisuutta lisäisi edelleen se, jos muotoilussa otettaisiin huomioon myös harvennushakkuut (lukumäärä, voimakkuus ja ajoitus sekä harvennustapa), koska ne vaikuttavat muun muassa marja- ja sienisatoihin, maisemaan, riistaan ja biodiversiteettiin. Metsien biologisen monimuotoisuuden kannalta olisi tärkeä ottaa huomioon myös lahopuun määrä sekä sen riippuvuus metsikön iästä ja harvennushakkuista.

Monien ympäristöhyötyjen, kuten maiseman, riistan ja biodiversiteetin, kuvaaminen yksittäisten metsiköiden puitteissa voi johtaa liian kapea-alaisiin päätelmiin. Metsikkötarkastelun puutteita onkin pyritty lieventämään käyttämällä ympäristöhyötyjen kuvaamisessa funktiota $A(s, \tau)$, jossa τ on viereisen metsikön ikä (Swallow ja Wear 1993, 1997, Koskela ja Ollikainen 2001b). Tästä on johdettu erilaisia tuloksia olettaen, että metsiköt ovat substituutteja, komplementteja tai toisistaan riippumattomia ympäristöhyötyjen suhteen.

Ympäristöhyötyjen kuvaaminen monimutkaistuu entisestään, kun otetaan huomioon eri metsiköiden väliset yhteydet laajemminkin. Metsän ikäluokkadynamiikan sisältävissä malleissa on käytetty funktiota $A(s^1, ..., s^m)$, jossa m on metsiköiden lukumäärä ja $\partial^2 A/\partial s^i \partial s^j \neq 0$, $i \neq j$ (Tahvonen ja Salo 1999), tai funktiota $A(\mathbf{x}_t)$, jossa vektori $\mathbf{x}_t$ kuvaa metsän kaikkien ikäluokkien pinta-aloja (Bowes ja Krutilla 1985, 1989). Molemmissa spesifikaatioissa *in situ* -hyödyt riippuvat koko metsän ikäluokkajakaumasta, mitä voidaan pitää varsin luontevana tapana kuvata ympäristöhyötyjä metsälö- tai aluetasolla.

Tahvonen (2002) kuvasi ympäristöhyötyjä Bowesin ja Krutillan (1985, 1989) tapaan ikäluokkien pinta-aloilla. Hän käytti kuvauksessa funktiota $A(g_t)$, jossa $g_t = \sum_{s=1}^{n+1} \alpha_s x_{st}$, ja ei-negatiivisia vakioita α_s, $s = 1, ..., n+1$, jotka ilmaisevat, miten ympäristöhyödyt riippuvat metsikön iästä. Analyyttisessa tarkastelussa oletettiin, että vain "vanhaan metsään" $x_{n+1,t}$ liittyy ympäristöhyötyjä, jolloin $\alpha_s = 0$, $s = 1, ..., n$, mutta numeerisia laskelmia tehtiin myös kahdella vaihtoehtoisella mallilla. Ensimmäisessä metsikön oletettiin olevan *in situ* -mielessä arvokasta, kun sen ikä on vähintään y, ts. $g_t = \sum_{s=y}^{n+1} x_{st}$, jossa $1 < y < n+1$. Toisessa muotoilussa α kasvoi metsikön iän funktiona.

4.2 *In situ* -arvostukset sekä kulutus- ja säästämispäätökset

Oletetaan, että metsän pinta-ala Y koostuu kolmesta puuston ikäluokasta: ikäluokista 1 ja 2 sekä niitä vanhemmasta ikäluokasta. Siten $Y = x_{1t}+x_{2t}+x_{3t}$, jossa x_{st}, $s = 1, 2, 3$ tarkoittaa ikäluokan s pinta-alaa periodin t lopussa ennen päätehakkuuta. Hakkaamalla pinta-ala z_{st} ikäluokasta s saadaan puumäärä f_s, $s = 1, 2, 3$ (kuutiometreissä). Oletetaan lisäksi, että $f_1 < f_2 = f_3$, joten puumäärää kuvaavan muuttujan voidaan katsoa approksimoivan esimerkiksi logistista kasvufunktiota. Ikäluokan 2 pinta-ala seuraavalla periodilla on sama kuin ikäluokan 1 pinta-ala edellisellä periodilla vähennettynä hakkuiden pinta-alalla, ts. $x_{2,t+1} = x_{1t} - z_{1t}$. Myös "vanhaa" metsää x_{3t} voidaan hakata, mutta sen puuston tilavuus (maa-alayksikköä kohti) on sama kuin ikäluokalla 2. Tältä osin kuvaus vastaa esimerkiksi Johanssonin ja Löfgrenin (1985, 115), Binkleyn (1987) ja Tahvosen (2002) muotoilemia ikäluokkamalleja, joissa puuston tilavuuden oletetaan pysyvän vakiona tietyn iän jälkeen.

Ikäluokan x_{3t} pinta-ala seuraavalla periodilla saadaan laskemalla yhteen ikäluokkien 2 ja 3 pinta-alat edellisellä periodilla ja vähentämällä näin saadusta summasta vanhan metsän ja ikäluokan 2 hakkuut, ts. $x_{3,t+1} = x_{3t} + x_{2t} - z_{2t}$. Käyttämällä z_{1t}:n määritelmää ja maa-alaa koskevaa rajoitetta saadaan edelleen $x_{1,t+1} = z_{1t} + z_{2t}$, eli ikäluokan 1 pinta-ala seuraavalla periodilla on sama kuin koko hakkuuala tällä periodilla. Tämä on yleistys Wanin (1994) ja Salon ja Tahvosen (2002a) malleista, joissa puuston oletetaan menettävän arvonsa kahden periodin jälkeen. Nyt esiteltävässä (realistisemmassa) mallissa ikäluokan 2 puita voidaan kasvattaa edelleen ja ne voidaan myöhemmin joko hakata millä tahansa periodilla tai suojella ikuisesti vanhoina metsinä.

Metsien *in situ* -arvostuksia kuvaa $A(g_t)$, jossa A on kasvava ja aidosti konkaavi funktio ja $g_t = \alpha_1 x_{1t} + \alpha_2 x_{2t} + \alpha_3 x_{3t}$, $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3$. Varsin luonteva tulkinta g_t:lle on lineaarinen tuotantofunktio, jossa α_s, $s = 1, 2, 3$ kuvaa eri ikäluokkien tuottamien ympäristöhyödykkeiden määriä. Vakioiden α_s voidaan tulkita kuvaavan myös eri ikäluokkien laatua tai merkitystä *in situ* -mielessä.

Kunkin periodin t kokonaishakkuumäärä on h_t, jossa $h_t = f_1 z_{1t} + f_2 z_{2t}$. Metsänomistajan metsätalouden ulkopuolista varallisuutta kuvaa a_t, metsätalouden ulkopuolisia tuloja m_t ja kulutuksesta saatavaa hyötyä $U(c_t)$, jossa U on kasvava ja aidosti konkaavi hyötyfunktio. Kun b (≤ 1) on subjektiivinen aikapreferenssi ja r markkinakorko, metsänomistajan ongelma on

$$V(x_{10}, x_{20}, a_0) = \max_{\{z_{st},\ s=1,2,\ t=0,\ldots\}} \sum_{t=0}^{\infty} b^t U(c_t) + A(g_t) \tag{4.1}$$

ehdolla, että

$$a_{t+1} = a_t(1+r) + p_t h_t + m_t - c_t, \ t = 0, ... \tag{4.2}$$

$$h_t = f_1 z_{1t} + f_2 z_{2t}, \ t = 0, ... \tag{4.3}$$

$$z_{1t} = x_{1t} - x_{2,t+1}, \ t = 0, ... \tag{4.4}$$

$$z_{2t} = x_{2t} + x_{3t} - x_{3,t+1}, \ t = 0, ... \tag{4.5}$$

$$x_{3t} = Y - x_{1t} - x_{2t}, \ t = 0, ... \tag{4.6}$$

$$z_{st} \geq 0, \ s = 1, 2, \ t = 0, .. \tag{4.7}$$

$$x_{st} \geq 0, \ s = 1, 2, 3, \ t = 0, ... \tag{4.8}$$

$$\lim_{t \to \infty} b^t a_t \geq 0, \tag{4.9}$$

$$a_0, \ x_{10}, \ x_{20}, \ x_{30} \ \text{ovat annettuja} \tag{4.10}$$

Ehdon (4.2) mukaan seuraavan periodin varallisuus a_{t+1} saadaan edellisen periodin varallisuuden, markkinakoron, puunmyyntitulojen, metsätalouden ulkopuolisten tulojen ja kulutuksen avulla. Pääte-ehto (4.9) puolestaan rajoittaa varallisuuden nykyarvon ei-negatiiviseksi, kun $t \to \infty$. Käytännössä tämä niin sanottu *no-Ponzi-game* -ehto estää taloudenpitäjää velkaantumasta asymptoottisesti markkinakorkoa nopemmin (Blanchard ja Fischer 1989, 49).

Kyseessä on neljän varantomuuttujan diskreettiaikainen dynaaminen optimointitehtävä. Muuttuja h_t voidaan eliminoida yhtälöllä (4.3) ja z_{1t}, $t = 0, ...$ yhtälöllä (4.4), kun otetaan samanaikaisesti huomioon rajoitus $z_{1t} \geq 0$, ts. $x_{1t} - x_{2,t+1} \geq 0$, $t = 0, ...$ Lisäksi z_{2t}, $t = 0, ...$ voidaan eliminoida yhtälöllä (4.5) ja x_{3t}, $t = 0, ...$ yhtälöllä (4.6). Samalla on kuitenkin otettava huomioon rajoitteet $(z_{2t} = x_{2t} + x_{3t} - x_{3,t+1} =)\ x_{1,t+1} + x_{2,t+1} - x_{1t} \geq 0$, $t = 0, ...$ ja $(x_{3t} =)\ Y - x_{1,t+1} - x_{2,t+1} \geq 0$, $t = 0, ...$

Jatkossa optimaalista hakkuupolitiikkaa tarkastellaan kolmen eri *in situ* -hyötyä koskevan oletuksen puitteissa. Perustilanteessa metsästä ei saada *in situ* -hyötyä eli $A(g_t) \equiv 0 \ \forall t$. Toisessa tapauksessa *in situ* -hyödyn oletetaan riippuvan ainoastaan vanhan metsän pinta-alasta, ts. $A(g_t) > 0$, $g_t = \alpha_1 x_{1t} + \alpha_2 x_{2t} + \alpha_3 x_{3t}$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ ja $\alpha_3 > 0$. Viimeisessä ja ehkä realistisimmassa tapauksessa *in situ* -hyöty riippuu kahden vanhimman ikäluokan pinta-aloista ja kummankin ikäluokan kontribuutio on sitä suurempi, mitä suurempi on kyseisen ikäluokan pinta-ala, ts. $A(g_t) > 0$, $g_t = \alpha_1 x_{1t} + \alpha_2 x_{2t} + \alpha_3 x_{3t}$, $\alpha_1 = 0$ ja $0 < \alpha_2 < \alpha_3$.

Tarkastellaan aluksi *in situ* -tapausta, jossa $A(g_t) > 0$, $g_t = \alpha_1 x_{1t} + \alpha_2 x_{2t} + \alpha_3 x_{3t}$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ ja $\alpha_3 > 0$. Tapaus, jossa $A(g_t) \equiv 0\ \forall t$, on tämän yksinkertaistus. Lagrangen yhtälöksi saadaan

$$\begin{aligned} L \;=\; & \sum_{t=0}^{\infty} b^t \{U(c_t) + A(Y - x_{1t} - x_{2t}) + \\ & \beta_t \{a_t(1+r) - a_{t+1} - c_t + p_t [f_1(x_{1t} - x_{2,t+1}) + \\ & f_2(x_{1,t+1} + x_{2,t+1} - x_{1t})] + m_t\} + \phi_{1t}(x_{1t} - x_{2,t+1}) + \\ & \phi_{2t}(x_{1,t+1} + x_{2,t+1} - x_{1t}) + \lambda_t (Y - x_{1,t+1} - x_{2,t+1})\}, \end{aligned} \tag{4.11}$$

jossa β_t, ϕ_{st} ja λ_t, $s = 1, 2$, $t = 0, \ldots$ ovat Lagrangen kertoimia. Kuhn–Tucker-ehdot optimille ovat

$$b^{-t}\frac{\partial L}{\partial c_t} = U'(c_t) - \beta_t = 0, \tag{4.12}$$

$$b^{-t}\frac{\partial L}{\partial a_{t+1}} = b(1+r)\beta_{t+1} - \beta_t = 0, \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned} b^{-t}\frac{\partial L}{\partial \beta_t} \;=\; & a_t(1+r) - a_{t+1} - c_t + \\ & p_t [f_1(x_{1t} - x_{2,t+1}) + f_2(x_{1,t+1} + x_{2,t+1} - x_{1t})] + m_t = 0, \end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned} b^{-t}\frac{\partial L}{\partial x_{1,t+1}} \;=\; & -bA'(Y - x_{1,t+1} - x_{2,t+1}) + p_t f_2 \beta_t + \\ & b p_{t+1}(f_1 - f_2)\beta_{t+1} + b\phi_{1,t+1} + \phi_{2t} - b\phi_{2,t+1} - \lambda_t \le 0, \end{aligned} \tag{4.15}$$

$$(\partial L / \partial x_{1,t+1})\, x_{1,t+1} = 0, \; x_{1,t+1} \ge 0, \tag{4.16}$$

$$\begin{aligned} b^{-t}\frac{\partial L}{\partial x_{2,t+1}} \;=\; & -bA'(Y - x_{1,t+1} - x_{2,t+1}) + p_t (f_2 - f_1)\beta_t - \\ & \phi_{1t} + \phi_{2t} - \lambda_t \le 0, \end{aligned} \tag{4.17}$$

$$(\partial L / \partial x_{2,t+1})\, x_{2,t+1} = 0, \; x_{2,t+1} \ge 0, \tag{4.18}$$

$$x_{1t} - x_{2,t+1} \ge 0, \;\; \phi_{1t}(x_{1t} - x_{2,t+1}) = 0, \;\; \phi_{1t} \ge 0, \quad t = 0, \ldots, \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned} x_{1,t+1} + x_{2,t+1} - x_{1t} \;\ge\; & 0, \;\; \phi_{2t}(x_{1,t+1} + x_{2,t+1} - x_{1t}) = 0, \\ \phi_{2t} \;\ge\; & 0, \;\; t = 0, \ldots, \end{aligned} \tag{4.20}$$

$$Y - x_{1,t+1} - x_{2,t+1} \ge 0, \;\; \lambda_t(Y - x_{1,t+1} - x_{2,t+1}) = 0, \;\; \lambda_t \ge 0, \; t = 0, \ldots \tag{4.21}$$

Optimi on olemassa, kun hyöty on rajoitettu ja $b < 1$ (teoreema 4.6., Stokey ja Lucas (1989, 79)). Kertoimien ϕ_{1t} ja ϕ_{2t} voidaan tulkita kuvaavan hakkuualojen z_{1t} ja z_{2t} marginaalilisäyksien arvoa periodin $t + 1$ alussa.

Analyysi etenee jatkossa siten, että kunkin *in situ* -tapauksen kohdalla johdetaan ensin vakioista stationaarista tilaa koskevat tulokset. Tämän jälkeen analysoidaan, voiko vakioisen stationaarisen tilan ympärillä olla sykli. Kolmannessa tapauksessa, jossa *in situ* -hyöty riippuu kahden vanhimman ikäluokan pinta-aloista, joudutaan luonnollisesti ensin johtamaan kyseistä tapausta vastaava Lagrangen yhtälö ja Kuhn–Tucker-ehdot optimille.

TAPAUS 1: Metsästä ei saada lainkaan *in situ* -hyötyä eli $A(g_t) \equiv 0$ $\forall t$.

Tarkastellaan aluksi, millä ehdolla kannattaa hakata vain kahden periodin ikäistä metsää eli ratkaisu $z_{2t} > 0$, $z_{1t} = 0$, $x_{st} > 0$, $s = 1, 2$, $t = 0, \ldots$ on optimaalinen. Ehdon (4.20) perusteella $\phi_{2t} = 0$. Ratkaisemalla λ_t ehdosta (4.15) ja sijoittamalla se (4.17):ään saadaan

$$\phi_{1t} + b\phi_{1,t+1} = bp_{t+1} \left(f_2 - f_1\right) \beta_{t+1} - p_t f_1 \beta_t \qquad (4.22)$$

ja edelleen ehdon (4.19) perusteella

$$bp_{t+1} \left(f_2 - f_1\right) \beta_{t+1} - p_t f_1 \beta_t \geq 0. \qquad (4.23)$$

Käyttämällä hyväksi differenssiyhtälön (4.13) ratkaisua epäyhtälö (4.23) voidaan esittää muodossa

$$bp_{t+1}(f_2 - f_1)\beta_0 \left[\frac{1}{b(1+r)}\right]^{t+1} - p_t f_1 \beta_0 \left[\frac{1}{b(1+r)}\right]^t \geq 0 \qquad (4.24)$$

ja olettamalla, että $p_{t+1} = p_t = p$, edelleen muodossa

$$\beta_0 \left[\frac{1}{b(1+r)}\right]^t \left[\frac{p(f_2 - f_1)}{(1+r)} - pf_1\right] \geq 0. \qquad (4.25)$$

Yhtälön (4.12) perusteella $\beta_0 > 0$ ja lisäksi $[1/b(1+r)]^t > 0$. Siten epäyhtälön (4.25) vasen puoli on positiivinen, kun

$$\frac{f_2 - f_1}{f_1} > 1 + r. \qquad (4.26)$$

Toisin sanoen metsänomistajan kannattaa hakata vain kahden periodin ikäistä metsää, jos puuston tilavuuden suhteellinen muutos (kasvu) on suurempi kuin $1 + r$. Kun merkitään $d = 1/(1+r)$, epäyhtälö (4.26) voidaan kirjoittaa muotoon $d(f_2 - f_1) - f_1 > 0$, joka vastaa Faustmannin ehtoa $f_2 d^2/(1 - d^2) > f_1 d/(1 - d)$, koska $\sum_{i=1}^{\infty} d^i = d/(1-d)$ ja $\sum_{i=1}^{\infty} d^{2i} = d^2/(1-d)$.

Tarkastellaan seuraavaksi, millä ehdolla kannattaa hakata vain yhden periodin ikäistä metsää, ts. ratkaisu $z_{1t} > 0$, $z_{2t} = 0$, $x_{st} > 0$, $s = 1, 2$, $t = 0, \ldots$ on optimaalinen. Ehdon (4.19) perusteella $\phi_{1t} = 0$. Kuten edellä, ratkaistaan λ_t ehdosta (4.15) ja sijoitetaan se lausekkeeseen (4.17), jolloin saadaan

$$b\phi_{2,t+1} = p_t f_1 \beta_t - bp_{t+1} (f_2 - f_1) \beta_{t+1} \tag{4.27}$$

ja ehdon (4.20) perusteella edelleen

$$p_t f_1 \beta_t - bp_{t+1} (f_2 - f_1) \beta_{t+1} \geq 0. \tag{4.28}$$

Sijoittamalla tähän yhtälön (4.13) ratkaisu voidaan kirjoittaa

$$p_t f_1 \beta_0 \left[\frac{1}{b(1+r)}\right]^t - bp_{t+1}(f_2 - f_1)\beta_0 \left[\frac{1}{b(1+r)}\right]^{t+1} \geq 0. \tag{4.29}$$

Olettamalla jälleen yksinkertaisuuden vuoksi, että $p_{t+1} = p_t = p$, saadaan

$$\beta_0 \left[\frac{1}{b(1+r)}\right]^t \left[pf_1 - \frac{p(f_2 - f_1)}{(1+r)}\right] \geq 0. \tag{4.30}$$

Yhtälön (4.12) perusteella $\beta_0 > 0$. Lisäksi tiedetään, että $[1/b(1+r)]^t > 0$. Tästä voidaan päätellä, että epäyhtälön (4.30) vasen puoli on positiivinen, kun

$$\frac{f_2 - f_1}{f_1} < 1 + r. \tag{4.31}$$

Toisin sanoen metsänomistajan kannattaa hakata vain yhden periodin ikäistä metsää, jos puuston tilavuuden suhteellinen kasvu on pienempi kuin $1 + r$. Kun merkitään $d = 1/(1+r)$, epäyhtälö (4.31) voidaan kirjoittaa muotoon $d(f_2 - f_1) - f_1 < 0$, joka vastaa Faustmannin ehtoa $f_2 d^2/(1-d^2) < f_1 d/(1-d)$.

Tarkastellaan vielä, milloin on optimaalista olla hakkaamatta kaikkea "vanhaa" metsää, ts. $x_{st} > 0$, $s = 1, 2, 3$, $t = 0, \ldots$ Ehdon (4.21) perusteella $\lambda_t = 0$. Ratkaisemalla ϕ_{2t} yhtälöstä (4.17) saadaan

$$\phi_{2t} = \phi_{1t} - p_t(f_2 - f_1)\beta_t \tag{4.32}$$

ja sijoittamalla se ehtoon (4.15) edelleen

$$\begin{aligned} p_t f_2 \beta_t + bp_{t+1} (f_1 - f_2) \beta_{t+1} + b\phi_{1,t+1} + \phi_{1t} - p_t (f_2 - f_1) \beta_t - \\ b \left[\phi_{1,t+1} - p_{t+1}(f_2 - f_1)\beta_{t+1}\right] = 0, \end{aligned} \tag{4.33}$$

joka yksinkertaistuu muotoon

$$\phi_{1t} = p_t (f_2 - f_1) \beta_t - p_t f_2 \beta_t. \tag{4.34}$$

Ehdon (4.19) perusteella $\phi_{1t} \geq 0$, joten voidaan kirjoittaa

$$p_t (f_2 - f_1) \beta_t - p_t f_2 \beta_t \geq 0 \tag{4.35}$$

ja edelleen

$$-p_t f_1 \beta_t \geq 0. \tag{4.36}$$

Koska yhtälön (4.12) perusteella $\beta_t > 0$, epäyhtälön (4.36) ratkaisu on tyhjä joukko, kun $p_t f_1 > 0$, $t = 0, \ldots$ Toisin sanoen ei ole optimaalista kasvattaa metsää "vanhaksi", vaan se hakataan aina Faustmannin ehdon mukaan.

Tuloksen tulkinta. Kun $A(g_t) \equiv 0$ $\forall t$, niin päätöksentekijän varallisuus a_t, metsätalouden ulkopuolelta saamat tulot m_t, kulutus c_t, subjektiivinen aikapreferenssi δ tai hyötyfunktio U eivät vaikuta hakkuu- ja tuotantopäätöksiin, vaan ne tehdään preferensseistä riippumatta. Toisin sanoen Fisherin separaatioteoreema on voimassa ja metsää hakataan Faustmannin ehdon mukaisesti. Lisäksi metsän alkuperäistä ikäluokkajakaumaa ei kannata ryhtyä muuttamaan.

TAPAUS 2: Metsästä saatava *in situ* -hyöty riippuu ainoastaan vanhan metsän pinta-alasta, ts. $A(g_t) > 0$, $g_t = \alpha_1 x_{1t} + \alpha_2 x_{2t} + \alpha_3 x_{3t}$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ **ja** $\alpha_3 > 0$.

Tarkastellaan aluksi optimiehtoja vakioiselle stationaariselle tilalle, kun $x_{st} > 0$, $s = 1, 2, 3$ ja $x_{1t} = x_{2t} < \frac{1}{2}$ $\forall t$. Oletetaan, että Faustmannin kiertoaika on kaksi periodia ja $\delta = r$, joka tarkoittaa yhtälön (4.13) perusteella sitä, että β_t on vakio.

Ehdon (4.21) mukaan $\lambda_t = 0$. Koska tarkastelun kohteena on vakioinen stationaarinen tila ja Faustmannin kiertoaika on kaksi periodia, niin $z_{2t} > 0$ ja $\phi_{2t} = 0$. Ratkaisemalla ϕ_{1t} yhtälöstä (4.17) ja sijoittamalla se yhtälöön (4.15) saadaan

$$-bA'(x_{3t}) + p_t f_2 \beta_t + b p_{t+1}(f_1 - f_2)\beta_t + b\left[-bA'(x_{3t}) + p_t(f_2 - f_1)\beta_t\right] = 0. \tag{4.37}$$

Yhtälön (4.12) perusteella ja olettaen, että $p_{t+1} = p_t = p$, saadaan edelleen

$$bA'(x_{3t}) + b^2 A'(x_{3t}) = p f_2 U'(c_t), \tag{4.38}$$

joka voidaan kirjoittaa muotoon

$$\frac{bA'(x_{3t})}{1-b} = \frac{p f_2 U'(c_t)}{1-b^2}. \tag{4.39}$$

Kahden maankäyttömuodon (puuntuotannon ja vanhan metsän suojelun) välinen maa-allokaatio on optimaalinen, kun vanhan metsän marginaalilisäyksestä saatavan *in situ* -hyödyn diskontattu arvo vastaa kahden periodin ikäisen metsän marginaaliarvoa. Kun (4.39) kirjoitetaan muotoon

$$\sum_{i=1}^{\infty} b^i A'(x_{3t}) = p f_2 U'(c_t) + \sum_{i=1}^{\infty} b^{2i} p f_2 U'(c_t), \tag{4.40}$$

havaitaan, että yhtälön oikea puoli koostuu kahdesta tekijästä: kahden periodin ikäisen metsän hakkuusta välittömästi saatavasta marginaaliarvosta $pf_2U'(c_t)$ ja saman ikäluokan paljaan maan marginaaliarvosta $\sum_{i=1}^{\infty} b^{2i} pf_2U'(c_t)$.

Tarkastellaan seuraavaksi optimiehtoja vakioiselle stationaariselle tilalle, kun Faustmannin kiertoaika on yksi periodi, $x_{st} > 0$, $s = 1, 2, 3$, $t = 0, \ldots$ ja $x_{1t} = x_{2t} < \frac{1}{2}\ \forall t$. Ehdon (4.21) mukaan $\lambda_t = 0$. Koska tarkastelun kohteena on vakioinen stationaarinen tila ja Faustmannin kiertoaika on yksi periodi, niin $z_{1t} > 0$ ja $\phi_{1t} = 0$. Ratkaisemalla ϕ_{2t} yhtälöstä (4.17) ja sijoittamalla se yhtälöön (4.15) saadaan

$$b\sum_{i=1}^{\infty} b^i A'(x_{3t}) = pf_1U'(c_t) + \sum_{i=1}^{\infty} b^i pf_1U'(c_t). \qquad (4.41)$$

Yhtälön (4.41) oikea puoli koostuu yhden periodin ikäisen metsän hakkuusta välittömästi saatavasta marginaaliarvosta $pf_1U'(c_t)$ ja saman ikäluokan paljaan maan marginaaliarvosta $\sum_{i=1}^{\infty} b^i pf_1U'(c_t)$. Myös yhtälön vasen puoli on erilainen kuin edellisessä tapauksessa (4.40), koska nyt vanhan metsän muodostumista joudutaan odottamaan yksi periodi kauemmin kuin tilanteessa, jossa Faustmannin kiertoaika oli kaksi periodia.

Komparatiivinen statiikka. Tarkastellaan seuraavaksi vakioisen stationaarisen tilan komparatiivista statiikkaa, kun Faustmannin kiertoaika on kaksi periodia. Kun c_t ratkaistaan ehdosta (4.14) ja sijoitetaan yhtälöön (4.38), saadaan

$$bA'(x_{3t})(1+b) - pf_2U'\left(ra_t + pf_2x_{2t} + m_t\right) = 0. \qquad (4.42)$$

Koska $x_{1t} + x_{2t} + x_{3t} = Y$, $x_{1t} = x_{2t}$, $b = 1/(1+\delta)$ ja $\delta = r$, niin yhtälö (4.42) voidaan kirjoittaa muotoon

$$\frac{2+r}{(1+r)^2}A'(x_{3t}) - pf_2U'\left[ra_t + pf_2\left(\frac{Y - x_{3t}}{2}\right) + m_t\right] = 0. \qquad (4.43)$$

Soveltamalla implisiittifunktioteoreemaa ja merkitsemällä $G \equiv \frac{2+r}{(1+r)^2}A'' + \frac{1}{2}p^2f_2^2U'' < 0$ saadaan

$$\frac{\partial x_{3t}}{\partial r} = \frac{\frac{(r+3)}{(1+r)^3}A' + pf_2a_tU''}{G} = \frac{\frac{(r+3)}{(1+r)^3}A'}{G} + \frac{pf_2a_tU''}{G} \lesseqgtr 0, \qquad (4.44)$$

$$\frac{\partial x_{3t}}{\partial p} = \frac{f_2U' + \frac{1}{2}pf_2^2\left(Y - x_{3t}\right)U''}{G} = \frac{f_2U'}{G} + \frac{\frac{1}{2}pf_2^2(Y - x_{3t})U''}{G} \lesseqgtr 0, \qquad (4.45)$$

$$\frac{\partial x_{3t}}{\partial f_2} = \frac{pU' + \frac{1}{2}p^2f_2(Y - x_{3t})U''}{G} = \frac{pU'}{G} + \frac{\frac{1}{2}p^2f_2(Y - x_{3t})U''}{G} \lesseqgtr 0, \qquad (4.46)$$

$$\frac{\partial x_{3t}}{\partial a_0} = \frac{pf_2rU''}{G} > 0, \qquad (4.47)$$

$$\frac{\partial x_{3t}}{\partial m_t} = \frac{p f_2 U''}{G} > 0. \tag{4.48}$$

Korkea alkuvarallisuus ja metsätalouden ulkopuolelta saatavat tulot lisäävät vanhan metsän pinta-alaa, mutta markkinakoron r (ja siten myös subjektiivisen aikapreferenssin δ), kantohinnan p ja puuston tilavuuden f_2 vaikutukset ovat epäselviä. Tämä johtuu siitä, että lausekkeisiin (4.44)–(4.46) sisältyy sekä substituutio- että tulovaikutuksia. Esimerkiksi kantohinnan kohdalla $f_2 U'/G$ kuvaa substituutiovaikutusta ja $\frac{1}{2}p^2 f_2(Y - x_{3t})U''/G$ tulovaikutusta. Jos substituutiovaikutus dominoi, kantohinnan nousu johtaa vanhan metsän pinta-alan vähenemiseen. Tulovaikutuksen dominoidessa tapahtuu päinvastoin.

Stationaarisista sykleistä. Tarkastellaan seuraavaksi vakioisen stationaarisen tilan luonnetta, kun $A(g_t) > 0$, $g_t = \alpha_1 x_{1t} + \alpha_2 x_{2t} + \alpha_3 x_{3t}$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ ja $\alpha_3 > 0$. Jos $f_2 d^2/(1-d^2) > f_1 d/(1-d)$, jossa $d = 1/(1+r)$, niin Faustmannin kiertoaika on kaksi periodia ja on olemassa stationaarinen tila $0 \le x_1^\infty = x_2^\infty \le \frac{1}{2}$. Tämä nähdään, kun λ_t eliminoidaan ehdoista (4.15) ja (4.17), jolloin saadaan $\phi_1^\infty = U'(c_t)\,[bp\,(f_2 - f_1) - pf_1]\,/\,(1+b)$, joka on positiivinen $\forall x_2^\infty \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Varjohinnan ϕ_1^∞ avulla ehto (4.17) voidaan kirjoittaa muotoon $pf_2U'(c_t)/(1+b) - bA'(1-2x_2^\infty) = \lambda^\infty \ge 0$. Kertomalla termillä $1/(1-b)$ saadaan ehdoksi

$$pf_2U'(c_t)/(1-b^2) - bA'(0)/(1-b) \begin{cases} \ge 0 \implies \lambda^\infty \ge 0 \text{ ja } x_2^\infty = \frac{1}{2}, \\ < 0 \implies \lambda^\infty = 0 \text{ ja } x_2^\infty < \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{4.49}$$

Toisin sanoen jos kahden periodin ikäisen metsän (Faustmannin kaavalla laskettu) marginaaliarvo normaalimetsätilassa on suurempi kuin ensimmäisen *in situ* -käytössä olevan maayksikön *in situ* -arvo, kaikki maa allokoidaan puuntuotantoon. Jos näin ei ole, osa maasta suojellaan vanhana metsänä. Jälkimmäisessä tapauksessa maa-allokaatio saadaan yhtälöstä $pf_2U'(c_t)/(1-b^2) - bA'(1-2x_2^\infty)/(1-b) = 0$, joka vastaa yhtälöä (4.39). Kun A' kasvaa, vanhaa metsää suojellaan enemmän. Jos taas U' kasvaa, maata siirretään puuntuotantoon.

Tarkastellaan seuraavaksi, millä ehdolla optimiratkaisu tuottaa Faustmann-syklin vakioisen stationaarisen tilan ympärille, ts. $x_1^\infty = x_2^\infty \le \frac{1}{2}$. Syklisen ratkaisun täytyy toteuttaa ehdot $\lambda_t \ge 0$ ja $\phi_{1t} \ge 0$. Kun λ_t eliminoidaan ehdosta (4.17) lausekkeen (4.15) avulla, saadaan

$$\phi_{1t} + b\phi_{1,t+1} = bp_{t+1}(f_2 - f_1)\beta_{t+1} - p_t f_1 \beta_t, \tag{4.50}$$

$$\phi_{1,t+1} + b\phi_{1,t+2} = bp_{t+2}(f_2 - f_1)\beta_{t+2} - p_{t+1} f_1 \beta_{t+1}. \tag{4.51}$$

Eliminoimalla $\phi_{1,t+1}$ yhtälö (4.50) voidaan kirjoittaa muotoon

$$\phi_{1t} - b^2\phi_{1,t+2} = bp_{t+1} f_2 \beta_{t+1} - p_t f_1 \beta_t - b^2 p_{t+2}(f_2 - f_1)\beta_{t+2}. \tag{4.52}$$

Ehtojen (4.12) ja (4.13) perusteella $\beta_t = U'(c_t)$ ja vakio $\forall t$, kun $\delta = r$. Kun lisäksi otetaan huomioon, että syklin pituuden täytyy olla kaksi periodia, jolloin $\phi_{1t} = \phi_{1,t+2}$, ja oletetaan, että kantohinta $p = p_t$ $\forall t$, saadaan

$$\phi_{1t} = \frac{bpf_2U'(c_t) - U'(c_t)\left[pf_1 + b^2p\,(f_2 - f_1)\right]}{1 - b^2}, \tag{4.53}$$

$$\phi_{1,t+1} = \frac{bpf_2U'(c_{t+1}) - U'(c_{t+1})\left[pf_1 + b^2p\,(f_2 - f_1)\right]}{1 - b^2}. \tag{4.54}$$

Koska Faustmannin kiertoaika on kaksi periodia, niin ϕ_{1t} ja $\phi_{1,t+1}$ ovat positiivisia vakioita. Tämä tarkoittaa ehdon (4.19) perusteella sitä, että nuoren ikäluokan metsää ei hakata pitkän aikavälin tasapainossa. Ratkaisemalla λ_t lausekkeesta (4.15) tai (4.17) saadaan

$$\lambda_t = \frac{pf_2U'(c_t) - bpf_2U'(c_{t+1}) + (b^3 - b)A'(x_{3t})}{1 - b^2}. \tag{4.55}$$

Jos $A'(x_{3t}) = 0$, yhtälö (4.55) supistuu muotoon $\lambda_t = pf_2U'(c_t)/(1 + b) > 0$, mikä toteuttaa ehdon (4.21). Jos taas $x_{3t} > 0$, niin ehdon (4.21) perusteella $\lambda_t = 0$ ja (4.55) vastaa optimaalista maa-allokaatiota kuvaavaa yhtälöä (4.39). Kyseisestä yhtälöstä havaitaan, että vanhan metsän pinta-alan x_{3t} täytyy olla vakio ajan kuluessa. Koska ikäluokat x_{1t} ja x_{2t} eivät esiinny ehdoissa (4.53)–(4.55), kyseiset yhtälöt toteutuvat riippumatta siitä, miten metsämaata on allokoitu ikäluokille 1 ja 2. Näin ollen syklinen ratkaisu on mahdollinen.

Kun Faustmannin kiertoaika on kaksi periodia ja x_{3t} vakio, hakkuita koskeva ehto (4.3) voidaan kirjoittaa muotoon $h_t = f_2x_{2t}$. Koska optimiratkaisu voi olla syklinen stationaarinen tila ikäluokkien 1 ja 2 pinta-alojen suhteen, hakkuumäärä h_t ei ole välttämättä vakio. Tämän ja intertemporaalisen budjettirajoitteen (4.2) perusteella voidaan edelleen päätellä, että myös metsänomistajan varallisuus a_t voi vaihdella ajan kuluessa, kun metsätalouden ulkopuoliset tulot m_t oletetaan vakioksi ja $\delta = r$. Metsänomistajan kulutus voidaan määrittää budjettirajoitteesta (4.2) ottamalla huomioon *no-Ponzi-game* -ehto (4.9), jolloin saadaan $\sum_{i=1}^{\infty} p_ih_ib^i + \sum_{i=1}^{\infty} m_ib^i + a_0 - \sum_{i=1}^{\infty} \bar{c}b^i = 0$. Kun $\delta = r$, saadaan edelleen $\bar{c} = r\sum_{i=1}^{\infty} p_ih_ib^i + \overline{m} + ra_0$. Tämä voidaan kirjoittaa muotoon $\bar{c} = rV + \overline{m} + ra_0$, jossa V kuvaa metsän puuntuotannollista arvoa ja rV metsästä keskimäärin saatavaa tuottoa tarkasteltavaa aikayksikköä kohti.

TAPAUS 3: Metsästä saatava *in situ* -hyöty riippuu kahden vanhimman ikäluokan pinta-aloista ja kummankin ikäluokan kontribuutio on sitä suurempi, mitä suurempi on kyseisen ikäluokan pinta-ala, ts. $A(g_t) > 0$, $g_t = \alpha_1 x_{1t} + \alpha_2 x_{2t} + \alpha_3 x_{3t}$, $\alpha_1 = 0$ **ja** $0 < \alpha_2 < \alpha_3$.

Päätöksentekijän ongelma on

$$V(x_{10}, x_{20}, a_0) = \max_{\{z_{st},\ s=1,2,\ t=0,\ldots\}} \sum_{t=0}^{\infty} b^t \left[U(c_t) + A(\alpha_2 x_{2t} + \alpha_3 x_{3t})\right] \tag{4.56}$$

ehdoilla (4.2)–(4.9). Lagrangen yhtälöksi saadaan

$$\begin{aligned} L \;=\; & \sum_{t=0}^{\infty} b^t \left\{U(c_t) + A\left[\alpha_2 x_{2t} + \alpha_3 (Y - x_{1t} - x_{2t})\right] + \right. \\ & \beta_t \left\{a_t(1+r) - a_{t+1} - c_t + p_t\left[f_1(x_{1t} - x_{2,t+1}) + \right.\right. \\ & \left.\left. f_2(x_{1,t+1} + x_{2,t+1} - x_{1t})\right] + m_t\right\} + \phi_{1t}(x_{1t} - x_{2,t+1}) + \\ & \left. \phi_{2t}(x_{1,t+1} + x_{2,t+1} - x_{1t}) + \lambda_t (Y - x_{1,t+1} - x_{2,t+1})\right\}, \end{aligned} \tag{4.57}$$

ja Kuhn–Tucker-ehdoiksi (4.12)–(4.14), (4.16), (4.18)–(4.21) ja

$$\begin{aligned} b^{-t}\frac{\partial L}{\partial x_{1,t+1}} \;=\; & -\alpha_3 b A' \left[\alpha_2 x_{2,t+1} + \alpha_3 (Y - x_{1,t+1} - x_{2,t+1})\right] + \\ & p_t f_2 \beta_t + b p_{t+1}(f_1 - f_2)\beta_{t+1} + b\phi_{1,t+1} + \phi_{2t} - \\ & b\phi_{2,t+1} - \lambda_t \le 0, \end{aligned} \tag{4.58}$$

$$\begin{aligned} b^{-t}\frac{\partial L}{\partial x_{2,t+1}} \;=\; & (\alpha_2 - \alpha_3) b A' \left[\alpha_2 x_{2,t+1} + \alpha_3 (Y - x_{1,t+1} - x_{2,t+1})\right] \\ & + p_t (f_2 - f_1)\beta_t - \phi_{1t} + \phi_{2t} - \lambda_t \le 0. \end{aligned} \tag{4.59}$$

Tarkastellaan aluksi optimiehtoja vakioiselle stationaariselle tilalle, kun Faustmannin kiertoaika on kaksi periodia, $x_{st} > 0$, $s = 1, 2, 3$ ja $x_{1t} = x_{2t} < \frac{1}{2}$ $\forall t$. Oletetaan, että $\delta = r$, mikä tarkoittaa yhtälön (4.13) mukaan sitä, että β_t on vakio. Ehdon (4.21) perusteella $\lambda_t = 0$. Koska Faustmannin kiertoaika on kaksi periodia ja tarkastellaan vakioista stationaarista tilaa, $z_{2t} > 0$ ja $\phi_{2t} = 0$. Ehdoista (4.16), (4.18), (4.58) ja (4.59) saadaan

$$\alpha_3 b A' + (\alpha_3 - \alpha_2) b^2 A' = p_t f_2 \beta_t, \tag{4.60}$$

joka voidaan ehdon (4.12) perusteella ja olettaen, että $p_t = p$, kirjoittaa muotoon

$$\alpha_3 b A' + \alpha_3 b^2 A' - \alpha_2 b^2 A' = p f_2 U'(c_t). \tag{4.61}$$

Tästä saadaan

$$\frac{\alpha_3 b A'(\alpha_2 x_{2t} + \alpha_3 x_{3t})}{1-b} = \frac{p f_2 U'(c_t)}{1-b^2} + \frac{\alpha_2 b^2 A'(\alpha_2 x_{2t} + \alpha_3 x_{3t})}{1-b^2} \tag{4.62}$$

ja edelleen

$$\alpha_3 \sum_{i=1}^{\infty} b^i A'(\alpha_2 x_{2t} + \alpha_3 x_{3t}) = pf_2 U'(c_t) + \sum_{i=1}^{\infty} b^{2i} pf_2 U'(c_t) + \alpha_2 \sum_{i=1}^{\infty} b^{2i} A'(\alpha_2 x_{2t} + \alpha_3 x_{3t}). \tag{4.63}$$

Maan allokaatio riippuu siis muuttujista α_2, α_3, b, A', p, f_2 ja U'. Allokaatio on optimaalinen, kun vanhimmasta ikäluokasta saatava marginaalinen *in situ* -hyöty vastaa yhtälön (4.63) oikeanpuolista termiä. Se koostuu kahden periodin ikäisen metsän välittömästä hakkuusta saatavasta kulutuksen marginaalihyödyn arvosta, saman ikäluokan paljaan maan marginaaliarvosta sekä kahden periodin ikäisestä metsästä (joka toinen periodi) saatavasta marginaalisesta *in situ* -hyödystä.

Komparatiivinen statiikka. Tarkastellaan seuraavaksi vakioisen stationaarisen tilan komparatiivista statiikkaa. Ehdoista (4.14) ja (4.61) saadaan

$$\alpha_3 bA' + (\alpha_3 - \alpha_2) b^2 A' - pf_2 U'(ra_t + pf_2 x_{2t} + m_t) = 0. \tag{4.64}$$

Koska $b = 1/(1+\delta)$ ja oletuksen mukaan $\delta = r$, yhtälö (4.64) voidaan kirjoittaa muotoon

$$\frac{\alpha_3}{(1+r)} A'(\alpha_2 x_{2t} + \alpha_3 x_{3t}) + \frac{(\alpha_3 - \alpha_2)}{(1+r)^2} A'(\alpha_2 x_{2t} + \alpha_3 x_{3t}) - pf_2 U'(ra_t + pf_2 x_{2t} + m_t) = 0. \tag{4.65}$$

Soveltamalla implisiittifunktioteoreemaa ja merkitsemällä

$$M \equiv \left[\alpha_3 A''/(1+r)\right] \left[\alpha_3 + (\alpha_3 - \alpha_2)(1+r)\right] < 0,$$

saadaan

$$\frac{\partial x_{3t}}{\partial r} = \frac{\alpha_3 A'/(1+r)^2 + 2(\alpha_3 - \alpha_2) A'/(1+r)^3}{M} + \frac{pf_2 a_t U''}{M} \lesseqgtr 0, \tag{4.66}$$

$$\frac{\partial x_{3t}}{\partial p} = \frac{f_2 U'}{M} + \frac{pf_2^2 x_{2t} U''}{M} \lesseqgtr 0, \tag{4.67}$$

$$\frac{\partial x_{3t}}{\partial f_2} = \frac{pU'}{M} + \frac{p^2 f_2 x_{2t} U''}{M} \lesseqgtr 0, \tag{4.68}$$

$$\frac{\partial x_{3t}}{\partial a_0} = \frac{pf_2 r U''}{M} > 0, \tag{4.69}$$

$$\frac{\partial x_{3t}}{\partial m_t} = \frac{pf_2 U''}{M} > 0. \tag{4.70}$$

Korkea alkuvarallisuus ja metsätalouden ulkopuolelta saatavat tulot lisäävät vanhan metsän pinta-alaa, mutta markkinakoron r, kantohinnan p ja puuston tilavuuden f_2 vaikutukset ovat epäselviä ja riippuvat tulo- ja substituutiovaikutusten voimakkuudesta toisiinsa nähden.

Stationaarisista sykleistä. Tarkastellaan seuraavaksi pitkän aikavälin tasapainon luonnetta, kun $A(g_t) > 0$, $g_t = \alpha_2 x_{2t} + \alpha_3 x_{3t}$ $\forall t$ ja $\alpha_2 < \alpha_3$. Jos $f_2 d^2/(1-d^2) > f_1 d/(1-d)$, jossa $d = 1/(1+r)$, niin Faustmannin kiertoaika on kaksi periodia ja on olemassa stationaarinen tila $0 \leq x_1^\infty = x_2^\infty \leq \frac{1}{2}$. Tämä nähdään, kun eliminoidaan λ_t ehdoista (4.58) ja (4.59), jolloin saadaan

$$\phi_1^\infty = \left\{U'(c_t)\left[bp\left(f_2 - f_1\right) - pf_1\right] + \alpha_2 b A'\left[\alpha_2 x_2^\infty + \alpha_3\left(1 - 2x_2^\infty\right)\right]\right\} / \left(1+b\right),$$

joka on positiivinen $\forall x_2^\infty \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Varjohinnan ϕ_1^∞ avulla ehto (4.59) voidaan kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned}&\left\{pf_2 U'(c_t) + \alpha_2 b^2 A'\left[\alpha_2 x_2^\infty + \alpha_3\left(1 - 2x_2^\infty\right)\right]\right\}/(1+b) - \\ &\quad \alpha_3 b A'\left[\alpha_2 x_2^\infty + \alpha_3\left(1 - 2x_2^\infty\right)\right] = \lambda^\infty \geq 0.\end{aligned} \tag{4.71}$$

Kertomalla (4.71) termillä $1/(1-b)$ saadaan ehdoksi

$$\begin{aligned}&\left[pf_2 U'(c_t) + \alpha_2 b^2 A'\left(\frac{1}{2}\alpha_2\right)\right]/(1-b^2) - \\ &\alpha_3 b A'(\frac{1}{2}\alpha_2)/(1-b)\left\{\begin{array}{l} \geq 0 \implies \lambda^\infty \geq 0 \text{ ja } x_2^\infty = \frac{1}{2}, \\ < 0 \implies \lambda^\infty = 0 \text{ ja } x_2^\infty < \frac{1}{2}.\end{array}\right.\end{aligned} \tag{4.72}$$

Toisin sanoen, jos kahden periodin ikäisen metsän (Faustmannin kaavalla laskettu) marginaaliarvo normaalimetsätilassa lisättynä kahden periodin ikäisestä metsästä (joka toinen periodi) saatavalla diskontatulla marginaalisella *in situ* -hyödyn arvolla on suurempi kuin ensimmäisen vanhan metsämaayksikön *in situ* -arvo, kaikki maa allokoidaan yhden ja kahden periodin ikäisille puustoille. Jos näin ei ole, osa maasta suojellaan vanhana metsänä. Jälkimmäisessä tapauksessa optimaalinen maa-allokaatio saadaan yhtälöstä

$$\begin{aligned}&\left\{pf_2 U'(c_t) + \alpha_2 b^2 A'\left[\alpha_2 x_2^\infty + \alpha_3\left(1 - 2x_2^\infty\right)\right]\right\}/(1-b^2) - \\ &\quad \alpha_3 b A'\left[\alpha_2 x_2^\infty + \alpha_3\left(1 - 2x_2^\infty\right)\right]/(1-b) = 0,\end{aligned} \tag{4.73}$$

joka vastaa yhtälöä (4.62).

Tarkastellaan seuraavaksi, millä ehdolla optimiratkaisu tuottaa Faustmann-syklin vakioisen stationaarisen tilan ympärille, ts. $x_1^\infty = x_2^\infty \leq \frac{1}{2}$. Syklisen ratkaisun täytyy toteuttaa ehdot $\lambda_t \geq 0$ ja $\phi_{1t} \geq 0$. Kun λ_t eliminoidaan ehdosta (4.59) lausekkeen (4.58) avulla, saadaan

$$\begin{aligned}\phi_{1t} + b\phi_{1,t+1} &= bp_{t+1}(f_2 - f_1)\beta_{t+1} - p_t f_1 \beta_t + \\ &\quad \alpha_2 b A'\left[\alpha_2 x_{2,t+1} + \alpha_3\left(1 - x_{1,t+1} - x_{2,t+1}\right)\right],\end{aligned} \tag{4.74}$$

$$\phi_{1,t+1} + b\phi_{1,t+2} = bp_{t+2}(f_2 - f_1)\beta_{t+2} - p_{t+1}f_1\beta_{t+1} + \alpha_2 bA'\left[\alpha_2 x_{2,t+2} + \alpha_3\left(1 - x_{1,t+2} - x_{2,t+2}\right)\right]. \tag{4.75}$$

Eliminoimalla $\phi_{1,t+1}$ yhtälö (4.74) voidaan kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned}\phi_{1t} - b^2\phi_{1,t+2} = {} & bp_{t+1}f_2\beta_{t+1} - p_t f_1\beta_t - b^2 p_{t+2}(f_2 - f_1)\beta_{t+2} + \\ & \alpha_2 bA'\left[\alpha_2 x_{2,t+1} + \alpha_3\left(1 - x_{1,t+1} - x_{2,t+1}\right)\right] - \\ & \alpha_2 b^2 A'\left[\alpha_2 x_{2,t+2} + \alpha_3\left(1 - x_{1,t+2} - x_{2,t+2}\right)\right].\end{aligned} \tag{4.76}$$

Ehtojen (4.12) ja (4.13) perusteella $\beta_t = U'(c_t)$ ja vakio $\forall t$, kun $\delta = r$. Kun lisäksi otetaan huomioon, että syklin pituuden täytyy olla kaksi periodia, jolloin $\phi_{1t} = \phi_{1,t+2}$, $x_{1t} = x_{1,t+2}$ ja $x_{2t} = x_{2,t+2}$, ja oletetaan, että kantohinta $p = p_t$ $\forall t$, saadaan

$$\begin{aligned}\phi_{1t} = {} & \left\{bpf_2U'(c_t) - U'(c_t)\left[pf_1 + b^2p\left(f_2 - f_1\right)\right] + \right. \\ & \alpha_2 bA'\left[\alpha_2 x_{2,t+1} + \alpha_3\left(1 - x_{1,t+1} - x_{2,t+1}\right)\right] - \\ & \left.\alpha_2 b^2 A'\left[\alpha_2 x_{2t} + \alpha_3\left(1 - x_{1t} - x_{2t}\right)\right]\right\} / \left(1 - b^2\right),\end{aligned} \tag{4.77}$$

$$\begin{aligned}\phi_{1,t+1} = {} & \left\{bpf_2U'(c_{t+1}) - U'(c_{t+1})\left[pf_1 + b^2p\left(f_2 - f_1\right)\right] + \right. \\ & \alpha_2 bA'\left[\alpha_2 x_{2t} + \alpha_3\left(1 - x_{1t} - x_{2t}\right)\right] - \\ & \left.\alpha_2 b^2 A'\left[\alpha_2 x_{2,t+1} + \alpha_3\left(1 - x_{1,t+1} - x_{2,t+1}\right)\right]\right\} / \left(1 - b^2\right).\end{aligned} \tag{4.78}$$

Ratkaisemalla λ_t lausekkeesta (4.58) tai (4.59) saadaan

$$\begin{aligned}\lambda_t = {} & \left\{pf_2U'(c_t) - bpf_2U'(c_{t+1}) + \right. \\ & (\alpha_3 - \alpha_2)b^3 A'\left[\alpha_2 x_{2,t+1} + \alpha_3\left(1 - x_{1,t+1} - x_{2,t+1}\right)\right] + \\ & \alpha_2 b^2 A'\left[\alpha_2 x_{2t} + \alpha_3\left(1 - x_{1t} - x_{2t}\right)\right] - \\ & \left.\alpha_3 bA'\left[\alpha_2 x_{2,t+1} + \alpha_3\left(1 - x_{1,t+1} - x_{2,t+1}\right)\right]\right\} / \left(1 - b^2\right).\end{aligned} \tag{4.79}$$

Olkoon $\varphi \geq 0$ normaalimetsän ympärillä olevan syklin maksimisäde siten, että $x_{st} \in \left[\frac{1}{2} - \varphi,\ \frac{1}{2} + \varphi\right]$, $s = 1, 2$, $t = 0, \ldots$ Koska Faustmannin kiertoaika on kaksi periodia, ϕ_{1t} on minimissään yhtälössä (4.77), kun

$$\alpha_2 x_{2,t+1} + \alpha_3\left(1 - x_{1,t+1} - x_{2,t+1}\right) > \alpha_2 x_{2t} + \alpha_3\left(1 - x_{1t} - x_{2t}\right).$$

Vastaavasti λ_t on minimissään yhtälössä (4.79), kun

$$\alpha_2 x_{2t} + \alpha_3\left(1 - x_{1t} - x_{2t}\right) > \alpha_2 x_{2,t+1} + \alpha_3\left(1 - x_{1,t+1} - x_{2,t+1}\right).$$

Näin ollen syklin maksimisäde voidaan määrittää implisiittisesti epäyhtälöistä

$$\begin{aligned}\Gamma_1 \equiv {} & bpf_2U'(c_t) - U'(c_t)\left[pf_1 + b^2p\left(f_2 - f_1\right)\right] + \\ & \alpha_2 bA'\left[\alpha_2\left(x_2^\infty + \varphi\right) + \alpha_3\left(1 - 2x_2^\infty\right)\right] - \\ & \alpha_2 b^2 A'\left[\alpha_2\left(x_2^\infty - \varphi\right) + \alpha_3\left(1 - 2x_2^\infty\right)\right] \geq 0,\end{aligned} \tag{4.80}$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma_2 \equiv\ & pf_2U'(c_t) - bpf_2U'(c_{t+1}) + \\
& (\alpha_3-\alpha_2)b^3A'\left[\alpha_2\left(x_2^\infty-\varphi\right)+\alpha_3\left(1-2x_2^\infty\right)\right]+ \\
& \alpha_2b^2A'\left[\alpha_2\left(x_2^\infty+\varphi\right)+\alpha_3\left(1-2x_2^\infty\right)\right]- \\
& \alpha_3bA'\left[\alpha_2\left(x_2^\infty-\varphi\right)+\alpha_3\left(1-2x_2^\infty\right)\right]\geq 0,
\end{aligned} \tag{4.81}
$$

joista (4.80) tai (4.81) (tai molemmat) toteutuvat yhtälöinä.

Kun $A'(0)$ kasvaa nollasta, se saavuttaa jonkin äärellisen tason, jolloin $\lambda = 0$ lausekkeessa (4.72) ja stationaarinen tila toteuttaa $x_1^\infty = x_2^\infty < \frac{1}{2}$ ja

$$
\begin{gathered}
\left\{pf_2U'(c_t)+\alpha_2b^2A'\left[(\alpha_2x_2^\infty+\alpha_3(1-2x_2^\infty)\right]\right\}/(1-b^2)- \\
\alpha_3bA'\left[(\alpha_2x_2^\infty+\alpha_3(1-2x_2^\infty)\right]/(1-b)=0.
\end{gathered} \tag{4.82}
$$

Kertomalla tämä yhtälö termillä $(1-b^2)(1-b)$ saadaan

$$
\begin{gathered}
pf_2U'(c_t)-bpf_2U'(c_t)+(\alpha_3-\alpha_2)b^3A'\left[\alpha_2x_2^\infty+\alpha_3\left(1-2x_2^\infty\right)\right]+ \\
\alpha_2b^2A'\left[\alpha_2x_2^\infty+\alpha_3\left(1-2x_2^\infty\right)\right]-\alpha_3bA'\left[\alpha_2x_2^\infty+\alpha_3\left(1-2x_2^\infty\right)\right]=0,
\end{gathered} \tag{4.83}
$$

joka vastaa lauseketta (4.81), kun $\varphi = 0$. Koska $\partial\Gamma_2/\partial\varphi < 0$, syklin maksimisäde ei voi poiketa nollasta, kun $\lambda = 0$. Tästä voidaan päätellä, että kun ensimmäisestä vanhasta metsämaayksiköstä saatu marginaalinen *in situ* -hyöty on vähintään yhtäsuuri kuin kahden periodin ikäisen metsän (Faustmannin kaavalla laskettu) marginaaliarvo lisättynä kahden periodin ikäisestä metsästä (joka toinen periodi) saatavalla diskontatulla marginaalisella *in situ* -hyödyn arvolla, syklin säde on nolla. Tähän tulokseen päädytään aina olettaen, että $A' \to \infty$, kun $x_{3t} \to 0$. Normaalimetsän ympärillä oleva sykli katoaa, koska metsän ikäluokkajakaumaa on edullista tasoittaa allokoimalla osa metsämaasta tilapäisesti vanhan metsän kasvattamiseen, josta saadaan *in situ* -hyötyä jokaisella periodilla.

Normaalimetsätasapainon stabiilisuudesta. Tarkastellaan tilannetta, kun Faustmannin kiertoaika on kaksi periodia ja $A'(\alpha_2x_{2t}+\alpha_3x_{3t}) > 0$. Edellä olevan perusteella tällöin on olemassa yksikäsitteinen tasapaino $x_1^\infty = x_2^\infty < \frac{1}{2}$, kun $z_{1t} = 0$, $\phi_{1t} > 0$, $x_{3t} = 1 - x_{1t} - x_{2t} > 0$ ja $\lambda_t = 0$.

LAUSE 1. *Kun $z_{1t} = 0$ ja $x_{3t} > 0$, niin stationaarinen tila on lokaali satulapiste ja satulapisteuran Γ läheisyydessä on x_1, x_2, x_3 -tila-avaruudessa ei-tyhjä alue, josta optimiratkaisu saavuttaa uran Γ asymptoottisesti.*

Todistus. Kun $z_{1t} = 0$ ja $x_{3t} > 0$, ehdot (4.58) ja (4.59) voidaan kirjoittaa muotoon

$$
\begin{gathered}
-\alpha_3bA'\left[\alpha_2x_{2,t+1}+\alpha_3(1-x_{1,t+1}-x_{2,t+1})\right]+p_tf_2\beta_t+ \\
bp_{t+1}\left(f_1-f_2\right)\beta_{t+1}+b\phi_{1,t+1}=0,
\end{gathered} \tag{4.84}
$$

$$
\begin{gathered}
\left(\alpha_2-\alpha_3\right)bA'\left[\alpha_2x_{2,t+1}+\alpha_3(1-x_{1,t+1}-x_{2,t+1})\right]+ \\
p_t\left(f_2-f_1\right)\beta_t-\phi_{1t}=0.
\end{gathered} \tag{4.85}
$$

Kirjoittamalla (4.84) periodille $t-1$ saadaan

$$-\phi_{1t} = p_{t-1} f_2 \beta_{t-1}/b - p_t\,(f_2 - f_1)\,\beta_t - \alpha_3 A'\left[\alpha_2 x_{2t} + \alpha_3(1 - x_{1t} - x_{2t})\right]$$

ja sijoittamalla tämä yhtälöön (4.81) edelleen

$$\begin{aligned} p_{t-1} f_2 \beta_{t-1}/b - (\alpha_3 - \alpha_2)\, bA'\left[\alpha_2 x_{2,t+1} + \alpha_3(1 - x_{1,t+1} - x_{2,t+1})\right] - \\ \alpha_3 A'\left[\alpha_2 x_{2t} + \alpha_3\,(1 - x_{1t} - x_{2t})\right] = 0. \end{aligned} \tag{4.86}$$

Kun $z_{1t} = 0$, niin $x_{1,t+1} = x_{2,t+2}$ ja $x_{1t} = x_{2,t+1}$. Lisäksi yhtälön (4.12) perusteella $\beta_t = U'(c_t)$ $\forall t$ ja oletuksen mukaan $p = p_t$ $\forall t$. Näin ollen (4.86) voidaan kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned} g \equiv pf_2 U'(c_{t-1})/b - (\alpha_3 - \alpha_2)\, bA'\left[\alpha_2 x_{2,t+1} + \alpha_3(1 - x_{2,t+2} - x_{2,t+1})\right] - \\ \alpha_3 A'\left[\alpha_2 x_{2t} + \alpha_3\,(1 - x_{2,t+1} - x_{2t})\right] = 0, \end{aligned} \tag{4.87}$$

joka on toisen asteen epälineaarinen differenssiyhtälö. Sen karakteristinen yhtälö stationaarisessa tilassa on $\gamma(r) = r^2 + \omega_1 r + \omega_2 = 0$, jossa $\omega_1 = (\alpha_3 - \alpha_2)/\alpha_3 + \alpha_3/\left[(\alpha_3 - \alpha_2)\, b\right]$ ja $\omega_2 = 1/b$. Kun $\alpha_2 = 0$, saadaan $\gamma(1) = 2\,(1 + 1/b) > 4$, $\gamma(0) = 1/b > 1$ ja $\gamma(-1) = 0$. Koska $\gamma(r) \to \infty$, kun $r \to -\infty$, toinen juuri on reaalinen ja pienempi kuin -1. Kun $\alpha_2 > 0$, niin $\gamma(1) = 1 + (\alpha_3 - \alpha_2)/\alpha_3 + \alpha_3/\,(\alpha_3 - \alpha_2)\, b + 1/b > 2$ ja $\gamma(0) = 1/b > 1$. Koska $\partial\gamma/\partial\alpha_2 < 0$, niin nyt $\gamma(-1) < 0$. Koska lisäksi $\gamma(r) \to \infty$, kun $r \to -\infty$, niin $-1 < r_1 < 0$ ja $r_2 < -1$. Koska molemmat juuret ovat reaalisia ja negatiivisia ja toinen on alle ja toinen yli -1, niin stationaarinen tila on lokaali satulapiste, kun $z_{1t} = 0$ ja $x_{3t} > 0$.

Tarkastellaan vielä lopuksi pitkän aikavälin tasapainon luonnetta, kun $\lambda_t > 0$. Tällöin $x_{3t} = 0$ ja ehto (4.72) voidaan kirjoittaa muotoon

$$\left[pf_2 U'(c_t) + \alpha_2 b^2 A'\left(\frac{1}{2}\alpha_2\right)\right]/(1 - b^2) - \alpha_3 bA'(\frac{1}{2}\alpha_2)/(1 - b) > 0. \tag{4.88}$$

Optimaaliselle maa-allokaatiolle pätee nyt

$$\left\{pf_2 U'(c_t) + \alpha_2 b^2 A'\left(\alpha_2 x_2^{\infty}\right)\right\}/(1 - b^2) > \alpha_3 bA'\left(\alpha_2 x_2^{\infty}\right)/(1 - b). \tag{4.89}$$

Jos kahden periodin ikäisen metsän (Faustmannin kaavalla laskettu) marginaaliarvo normaalimetsätilassa lisättynä kahden periodin ikäisestä metsästä (joka toinen periodi) saatavalla diskontatulla marginaalisella *in situ* -hyödyn arvolla on suurempi kuin ensimmäisen vanhan metsämaayksikön *in situ* -arvo, kaikki maa allokoidaan yhden ja kahden periodin ikäisille puustoille.

Syklisen ratkaisun täytyy toteuttaa ehdot $\phi_{1t} \geq 0$ ja $\lambda_t \geq 0$ $\forall t$. Vastaavalla tavalla kuin edellä saadaan

$$\begin{aligned} \phi_{1t} \;=\; & \left\{bpf_2 U'(c_t) - U'(c_t)\left[pf_1 + b^2 p\,(f_2 - f_1)\right] + \right. \\ & \left. \alpha_2 bA'\left(\alpha_2 x_{2,t+1}\right) - \alpha_2 b^2 A'\left(\alpha_2 x_{2t}\right)\right\}/\left(1 - b^2\right), \end{aligned} \tag{4.90}$$

$$\begin{aligned}\phi_{1,t+1} &= \left\{bpf_2U'(c_{t+1}) - U'(c_{t+1})\left[pf_1 + b^2p\left(f_2 - f_1\right)\right] + \right. \\ &\left. \alpha_2bA'\left(\alpha_2x_{2t}\right) - \alpha_2b^2A'\left(\alpha_2x_{2,t+1}\right)\right\} / \left(1 - b^2\right),\end{aligned} \tag{4.91}$$

$$\begin{aligned}\lambda_t &= \left\{pf_2U'(c_t) - bpf_2U'(c_{t+1}) + (\alpha_3 - \alpha_2)b^3A'\left(\alpha_2x_{2,t+1}\right) + \right. \\ &\left. \alpha_2b^2A'\left(\alpha_2x_{2t}\right) - \alpha_3bA'\left(\alpha_2x_{2,t+1}\right)\right\} / \left(1 - b^2\right).\end{aligned} \tag{4.92}$$

Koska Faustmannin kiertoaika on kaksi periodia, ϕ_{1t} on minimissään yhtälössä (4.90), kun $x_{2,t+1} > x_{2t}$. Vastaavasti λ_t on minimissään yhtälössä (4.92), kun $x_{2t} > x_{2,t+1}$. Näin ollen syklin maksimisäde voidaan määrittää implisiittisesti epäyhtälöistä

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &\equiv bpf_2U'(c_t) - U'(c_t)\left[pf_1 + b^2p\left(f_2 - f_1\right)\right] + \\ &\alpha_2bA'\left[\alpha_2\left(x_2^\infty + \varphi\right)\right] - \alpha_2b^2A'\left[\alpha_2\left(x_2^\infty - \varphi\right)\right] \geq 0,\end{aligned} \tag{4.93}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_2 &\equiv pf_2U'(c_t) - bpf_2U'(c_{t+1}) + (\alpha_3 - \alpha_2)b^3A'\left[\alpha_2\left(x_2^\infty - \varphi\right)\right] + \\ &\alpha_2b^2A'\left[\alpha_2\left(x_2^\infty + \varphi\right)\right] - \alpha_3bA'\left[\alpha_2\left(x_2^\infty - \varphi\right)\right] \geq 0,\end{aligned} \tag{4.94}$$

joista (4.93) tai (4.94) (tai molemmat) toteutuvat yhtälöinä.

Lausekkeesta (4.93) havaitaan, että $\Gamma_1 > 0$, kun $\varphi = 0$ ja Faustmannin kiertoaika on kaksi periodia. Lisäksi $\partial\Gamma_1/\partial\varphi < 0$. Vastaavasti lausekkeesta (4.94) huomataan, että $\Gamma_2 > 0$, kun $\varphi = 0$ ja maa-allokaatio toteuttaa

$$pf_2U'(c_t)/\left(1 - b^2\right) + \alpha_2b^2A'\left(\alpha_2x_2^\infty\right)/\left(1 - b^2\right) \geq \alpha_3bA'\left(\alpha_2x_2^\infty\right)/(1-b). \tag{4.95}$$

Lisäksi $\partial\Gamma_2/\partial\varphi < 0$. Näin ollen optimiehdot toteutuvat myös silloin, kun $\varphi > 0$ ja riittävän pieni, mikä tarkoittaa sitä, että syklinen ratkaisu on mahdollinen.

Tutkitaan lopuksi, millä ehdolla kaksi periodia on optimaalinen kiertoaika eli $\phi_{1t} \geq 0$. Kun $x_{1t} = x_{2t} \leq \frac{1}{2}$, niin $\varphi = 0$ ja epäyhtälö (4.93) voidaan kirjoittaa muotoon

$$bpf_2U'(c_t) - U'(c_t)\left[pf_1 + b^2p\left(f_2 - f_1\right)\right] + \alpha_2bA'\left(\alpha_2x_{2t}\right) - \alpha_2b^2A'\left(\alpha_2x_{2t}\right) \geq 0. \tag{4.96}$$

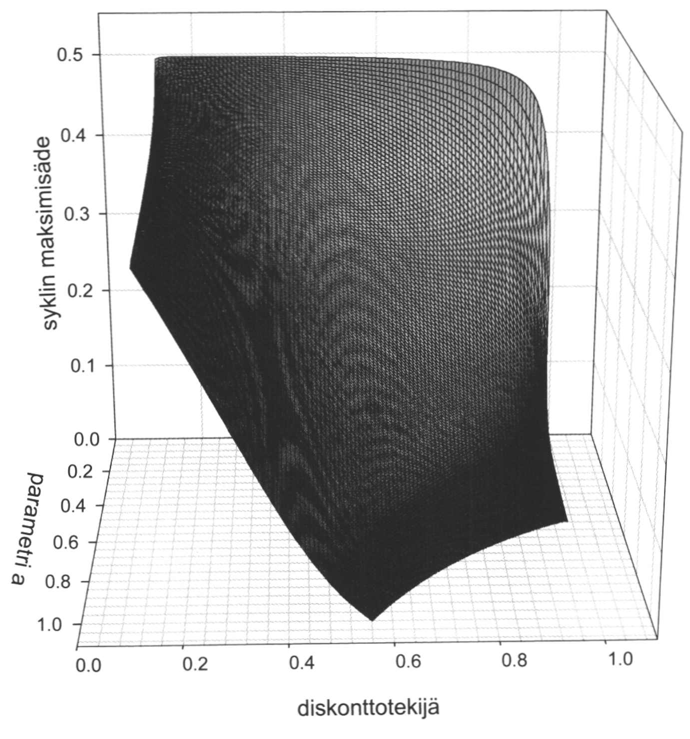
Jos $\alpha_2 = 0$, saadaan Faustmann-ehto, jonka mukaan kahden periodin kiertoaika on vähintään yhtä edullinen kuin yhden periodin pituinen. Vastaavasti jos $\alpha_2 > 0$, saadaan ehdoksi

$$\frac{bpf_2U'(c_t)}{1 - b^2} + \frac{\alpha_2bA'\left(\alpha_2x_{2t}\right)}{1 - b^2} \geq \frac{pf_1U'(c_t)}{1 - b}, \tag{4.97}$$

jossa vasen puoli kuvaa marginaalisesta maayksiköstä kahden periodin kiertoajalla saatavaa hyötyä ja oikea puoli yhden periodin kiertoajalla saatavaa hyötyä. On huomionarvoista, että epäyhtälö (4.97) sisältää metsänomistajakohtaiset tekijät, koska $U'(c_t)$ riippuu metsänomistajan alkuvarallisuudesta ja metsätalouden ulkopuolelta saamista tuloista. Tässäkin mielessä (4.97) edustaa yleisempää ympäristöarvostukset huomioon ottavaa lähestymistapaa optimaalisen kiertoajan määrittämiseen kuin metsikkötason Hartmanin (1976) malli.

Edellä tarkastelun kohteena oli puuntuotannon suhteen normaalimetsä. Jos stationaarinen tila on syklinen, $A'(\alpha_2 x_{2t})$ vaihtelee ajan kuluessa. Tällöinkin epäyhtälön (4.97) tulee päteä jokaisella periodilla.

Kuvassa 1 on esitetty syklin maksimisäde diskonttotekijän b ja parametrin a funktiona. Kuvasta nähdään, että syklin maksimisäde pienenee, kun diskonttotekijä tai parametri a kasvaa. Lisäksi havaitaan, että syklin maksimisäde on $\frac{1}{2}$, kun $a = 0$. Tämä vastaa aikaisemmin esitettyä tapausta $A(g_t) \equiv 0 \ \forall t$, jossa metsää hakataan Faustmannin ehdon mukaisesti eikä metsän alkuperäistä ikäluokkajakaumaa kannata ryhtyä muuttamaan.



Kuva 1: Syklin maksimisäde, kun $U(C) = \ln C$, $C = 5$, $p = 1$, $f_1 = 1$, $f_2 = 10$, $A(X) = a \ln(X)$, $\alpha_2 = 2$ ja $\alpha_3 = 3$

5 JOHTOPÄÄTÖKSIÄ

Metsäekonominen tutkimus on perinteisesti keskittynyt optimoimaan metsänkäsittelyä metsikkötasolla. Tällöin on – eksplisiittisesti tai implisiittisesti – oletettu, ettei yksittäisten metsiköiden käsittelyillä ole yhteyttä toisiinsa ja että Fisherin separaatioteoreema on voimassa eli kulutus- ja tuotantopäätökset eivät riipu toisistaan. Todellisuudessa metsään liittyvät ympäristöarvostukset, epätäydelliset pääomamarkkinat, epävarmuus ja metsänkäsittelyn skaalavaikutukset voivat kuitenkin aiheuttaa sen, ettei yksittäisten metsiköiden käsittelyä koskevien ratkaisujen seurauksena päästä tehokkaaseen lopputulokseen metsälön tai päätöksentekijän koko talouden kannalta.

Metsäekonomian tutkimuksessa eri metsiköiden hakkuupäätösten riippuvuus toisistaan on tiedetty jo kauan. Tästä huolimatta metsän ikäluokkakokonaisuuden ja metsänomistajan koko talouden huomioon ottaminen on tyypillisesti jäänyt metsäsuunnittelun (*forest management planning*) tehtäväksi. Se on pyrkinyt vastaamaan metsikkökohtaisen tarkastelun puutteisiin pitämällä tavoitteena tasaisia hakkuita ja siten myös puuston tasaista ikäluokkajakaumaa eli niin sanottua normaalimetsää. Sitä on pidetty metsätalouden ihannetilana jo yli 200 vuotta.

Normaalimetsän tai sen tavoittelun pohjalta kehitettiin 1800-luvulla ja 1900-luvun alussa toistakymmentä erilaista menetelmää, joilla voidaan määrittää puuntuotannollisesti kestävä vuotuinen hakkuusuunnite (Recknagel 1917, 66–128). Viimeisen 30 vuoden aikana metsäsuunnittelussa on sovellettu ennen muuta lineaarista ohjelmointia, mutta normaalimetsäajattelu on edelleen vahvasti hakkuulaskelmien taustalla. Kuten Buongiorno ja Gilles (1987, 49) toteavat: "*Even now the model* [of a regulated forest, kirj. huom.] *is used constantly, almost automatically, by foresters*".

Myös Suomen metsätaloudessa laajasti käytössä oleva MELA-ohjelmisto nojaa klassiseen Faustmannin malliin ja eksogeeniseen puun hintaan, mikä johtaa helposti hakkuumäärän suureen vuotuiseen vaihteluun. Tämän estämiseksi vuotuisia hakkuita joudutaan tyypillisesti rajoittamaan siten, että samalla tullaan implisiittisesti olettaneeksi tasaisen puuntuotannon optimaalisuus. Talousteoreettisessa mielessä kyseisiä rajoitteita voidaan kuitenkin pitää keinotekoisina niin kauan, kun on analyyttisesti osoittamatta, että normaalimetsä on pitkän aikavälin tasapaino ja että päätöksentekijän kannattaa pyrkiä normaalimetsään riippumatta metsän alkuperäisestä ikäluokkajakaumasta.

Viime vuosina tehtyjen teoreettisten tutkimusten mukaan normaalimetsän optimaalisuus riippuu varsin paljon siitä, miten aikaa mallinnetaan. Diskreetin ajan malleissa metsän ikäluokkarakenteen tasoittamisen marginaalikustannukset ovat aina positiivisia, mutta jatkuva-aikaisen tarkastelun malleissa ne lähestyvät nollaa, minkä seurauksena optimiratkaisuun liittyvä syklisyys voi hävitä ja normaalimetsä muodostua pitkän aikavälin tasapainoksi. Keskeinen kysymys normaalimetsän optimaalisuuden kannalta näyttäisi siis olevan se, voidaanko metsävarojen käyttöön (esim. puunkorjuuseen) katsoa liittyvän jonkinlaista kausiluonteisuutta. Pohjoisella havumetsävyöhykkeellä valtaosa hakkuista tehdään edelleen talvisin, mutta trooppisella sademetsävyöhykkeellä hakkuiden kausiluonteisuus lienee vähäisempää.

Tässä tutkimuksessa muotoillun ja ratkaistun mallin tulosten mukaan hakkuu- ja tuotantopäätökset tehdään preferensseistä riippumatta, jos metsään ei liity lainkaan ympäristöarvostuksia. Toisin sanoen Fisherin separaatioteoreema on voimassa. Jos ympäristöhyötyjä saadaan vain metsän vanhimmasta ikäluokasta ("vanhasta metsästä"), syklinen ratkaisu normaalimetsän ympärillä on mahdollinen. Kolmannessa ja ehkä realistisimmassa tapauksessa ympäristöhyötyjä saadaan kahdesta vanhimmasta ikäluokasta, vanhimmasta eniten. Tällöin normaalimetsä osoittautuu pitkän aikavälin optimiratkaisuksi, jos metsämaata kannattaa allokoida "vanhan metsän" kasvattamiseen.

Jatkossa metsän ikäluokkamalleja olisi tarpeen laajentaa siten, että niihin pystyttäisiin sisällyttämään epätäydelliset pääomamarkkinat ja epävarmuus. Myös harvennushakkuut sekä epälineaariset metsänuudistamis- ja hakkuukustannukset tulisi ottaa huomioon, koska esimerkiksi Suomessa yli puolet vuotuisesta hakkuumäärästä saadaan harvennushakkuista. Mallien realistisuutta edistäisi myös se, jos niissä otettaisiin huomioon metsiköiden tilajärjestys (spatiaalisuus), koska yksittäisen metsikön *in situ* -arvo voi riippua suuresti läheisten metsiköiden ominaisuuksista (vrt. alue-ekologinen metsäsuunnittelu). Lisäksi metsän ikäluokkamalleissa olisi tärkeä ottaa huomioon metsämaan heterogeenisuus ympäristöhyötyjen suhteen: jotkut metsiköt, kuten avainbiotoopit, ovat erityisen arvokkaita luonnon biologisen monimuotoisuuden kannalta, toiset taas esimerkiksi maisemallisten arvostusten, vesiensuojelun, virkistyskäytön tai riistanhoidon kannalta.

Myös metsäsuunnittelumalleja tulisi jatkossa kehittää niin, että puun hinta olisi niissä endogeeninen muuttuja. Näin toimittaessa malleissa ei enää tarvitsisi käyttää *ad hoc* -tyyppisiä rajoitteita hakkuiden tasaisuuden varmistamiseksi. Tämä muodostaisi vahvan teoreettisen perustan myös puun tarjonnan ja taloudellisen kestävyyden analysoinnille.

LÄHTEET

ADAMS, D. M. – ALIG, R. J. – McCARL, B. A. – CALLAWAY, J. M. – WINNETT, S. M. (1996): An analysis of the impacts of public timber harvest policies on private forest management in the United States. *Forest Science 42, 343–358.*

AMACHER, G. S. – KOSKELA, E. – OLLIKAINEN, M. (2002): Optimal forest policies in an overlapping generations economy with timber and money bequests. *Journal of Environmental Economics and Management 44, 346–369.*

BENHABIB, J. – RUSTICHINI, A. (1991): Vintage capital, investment, and growth. *Journal of Economic Theory 55, 323–339.*

BINKLEY, C. S. (1987): Economic models of timber supply. Teoksessa KALLIO, M. – DYKSTRA, D. P. – BINKLEY, C. S. (eds.): *The global forest sector: An analytical perspective.* John Wiley, Chichester. ss. 109–136.

BLANCHARD, O. J. – FISCHER, S. (1989): Lectures on macroeconomics. MIT Press, Cambridge, MA. 650 s.

BOUCEKKINE, R. – GERMAIN, M. – LICANDRO, O. (1997): Replacement echoes in the vintage capital growth models. *Journal of Economic Theory 74, 333–348.*

BOWES, M. D. – KRUTILLA, J. V. (1985): Multiple use management of public forestlands. Teoksessa KNEESE, A. V. – SWEENEY, J. L. (eds.): *Handbook of natural resource and energy economics. Volume II.* North-Holland, Amsterdam. ss. 531–569.

— (1989): Multiple-use management: The economics of public forestlands. Resources for the Future, Washington, D.C. 357 s.

BUONGIORNO, J. – GILLES, J. K. (1987): Forest management and economics. MacMillan, New York. 285 s.

BÖCKER, C. C. (1829): Om skogars skötsel i Norden. Första delen. Christ. Ludv. Hjelt., Åbo. 233 s. + 54 s. [Uusintapainos vuodelta 1929: *Silva Fennica 13.* 88 s.]

CAJANDER, A. K. (1910): Metsiemme uudistushakkaukset toisiinsa verrattuina. Eripainos kokoomateoksesta Maahenki. Otava, Helsinki. 54 s.

CALISH, S. – FIGHT, R. D. – TEEGUARDEN, D. E. (1978): How do nontimber values affect Douglas-fir rotations? *Journal of Forestry 76 (April), 217–221.*

CLARK, C. W. (1990): Mathematical bioeconomics. The optimal management of renewable resources. Second edition. John Wiley & Sons, New York. 286 s.

COTTA, H. (1804): Systematische Anleitung zur Taxation der Waldungen. Berlin. 408 s.

DAVIS, L. S. – JOHNSON, K. N. (1987): Forest management. Third edition. McGraw–Hill, New York. 790 s.

DAVIS, L. S. – JOHNSON, K. N. – BETTINGER, P. S. – HOWARD, T. E. (2001): Forest management: to sustain ecological, economic, and social values. 4th edition. McGraw–Hill, Boston, MA. 804 s.

ERICSSON, B. (1903): Oppi- ja käsikirja metsätalouden järjestelyssä. Ensimmäinen osa. Metsänarvioiminen. Weilin & Göös, Helsinki. 207 s.

— (1906): Oppi- ja käsikirja metsätalouden järjestelyssä. Toinen osa. Metsänjako-oppi. Weilin & Göös, Helsinki. 125 s.

FAUSTMANN, M. (1849): Berechnung des Wertes welchen Waldboden, sowie noch nicht haubare Holzbestände für die Waldwirtschaft besitzen. *Allgemeine Forst- und Jagd-Zeitung 25, 441–455.* [Julkaistu englanniksi vuonna 1995: Calculation of the value which forest land and immature stands possess for forestry. *Journal of Forest Economics 1, 7–44.*]

FERNOW, B. E. (1911): A brief history of forestry in Europe, the United States and other countries. Revised and enlarged edition. University Press, Toronto; and Forestry Quarterly, Cambridge, Mass. 506 s.

FRÄNGSMYR, T. – HEILBRON, J. L. – RIDER, R. E. (eds.). (1990): The quantifying spirit in the eighteenth century. University of California Press, Berkeley. 411 s.

GETZ, W. M. – HAIGHT, R. G. (1989): Population harvesting: Demographic models of fish, forest, and animal resources. Princeton University Press, Princeton, NJ. 391 s.

GYLDÉN, C. W. (1853): Handledling för skogshushållare. Tryckt hos H. C. Friis, Helsingfors. [Suomenkielinen uusintapainos vuodelta 1998: Suomalaisen metsänhoidon opas. Metsälehti Kustannus, Helsinki. 158 s.]

HAGFORS, E. A. M. (1929): Über die ökonomischen Ziele bei der Bewirtschaftung der Wälder. Selostus: Metsäliikkeen taloudellisista päämääristä. *Acta Forestalia Fennica 35.3.* 190 s.

— (1936): Katsaus kestävyyden käsitteen syntyyn ja olemukseen. *Metsätaloudellinen aikakauskirja.* ss. 178–182.

HANNIKAINEN, P. W. (1885): Metsien hoidosta metsän ystäville. Toinen vihko: Metsätalouden järjestämisestä eli metsänjaosta. Suomalaisen Kirjallisuuden Seuran Kirjapaino, Helsinki. 145 s.

— (1896): Suomen metsät kansallisomaisuutenamme. Otava, Helsinki. 273 s.

HANZLIK, E. J. (1922): Determination of the annual cut on a sustained basis for virgin American forests. *Journal of Forestry 20, 611–625.*

HARTIG, G. L. (1795): Anweisung zur Taxation der Forste, oder zur Bestimmung des Holzertrags der Wälder. Gießen. 200 s.

HARTMAN, R. (1976): Harvesting decision when a standing forest has value. *Economic Inquiry 14, 52–58.*

HASEL, K. (1985): Forstgeschichte. Ein Grundriß für Studium und Praxis. Paul Parey, Hamburg und Berlin. 258 s.

HEAPS, T. (1984): The forestry maximum principle. *Journal of Economic Dynamics and Control 7, 131–151.*

HEAPS, T. – NEHER, P. A. (1979): The economics of forestry when the rate of harvest is constrained. *Journal of Environmental Economics and Management 6, 297–319.*

HEYER, C. J. (1841): Die Waldertragsregelung. Gießen. 264 s.

HOGANSON, H. M. – McDILL, M. E. (1993): More on forest regulation: An LP perspective. *Forest Science 39, 321–347.*

HOTELLING, H. (1931): The economics of exhaustible resources. *Journal of Political Economy 39, 137–175.*

HUNDESHAGEN, J. C. (1826): Die Forstabschätzung auf neuen, wissenschaftlichen Grundlagen. Laupp, Tübingen.

ILVESSALO, Y. (1943): Metsälautakuntain toimintapiirien metsät. II:n valtakunnan metsien arvioinnin tuloksia. Keskusmetsäseura Tapio, Helsinki. 130 s.

JOHANSSON, P.–O. – LÖFGREN, K.–G. (1985): The economics of forestry and natural resources. Basil Blackwell, Oxford.

JOHNSON, K. N. – SCHEURMAN, H. L. (1977): Techniques for prescribing optimal timber harvest and investment under different objectives – discussion and synthesis. *Forest Science, monograph 18.*

JUDEICH, F. (1869): Die österreichische Kameraltaxe. *Tharandter Forstliche Jahrbuch 19.* [Julkaistu englanniksi vuonna 1965: The Austrian cameral valuation method. *Forestry Chronicle 41, 84–92.*]

KARPPINEN, H. – HÄNNINEN, H. – RIPATTI, P. (2002): Suomalainen metsänomistaja 2000. *Metsäntutkimuslaitoksen tiedonantoja 852.* 83 s.

KEMP, M. C. – MOORE, E. J. (1979): Biological capital theory: A question and a conjecture. *Economics Letters 4, 141–144.*

KOSKELA, E. – OLLIKAINEN, M. (1999): Timber supply, amenity values and biological risk. *Journal of Forest Economics 5, 285–304.*

— (2001a): Forest taxation and rotation age under private amenity valuation: New results. *Journal of Environmental Economics and Management 42, 374–384.*

— (2001b): Optimal private and public harvesting under spatial and temporal interdependence. *Forest Science 47, 484–496.*

KUUSELA, K. (1959): Suurin kestävä hakkuusuunnite ja menetelmä sen arvioimiseksi. *Acta Forestalia Fennica 71.1.* 36 s.

KUUSELA, K. – NYYSSÖNEN, A. (1962): Tavoitehakkuulaskelma. *Acta Forestalia Fennica 74.6.* 34 s.

LAITAKARI, E. (1960): Metsähallinnon vuosisataistaival 1859–1959. *Acta Forestalia Fennica 107.* 447 s.

LAKARI, O. J. (1928): Valtionmetsät. Teoksessa ILVESSALO, L. (toim.): *Maa ja metsä IV. Metsätalous I.* WSOY, Porvoo. ss. 108–119.

LEIKOLA, M. (1998): C. W. Gyldén ja hänen oppikirjansa Suomen metsien hoidosta. Teoksessa GYLDÉN, C. W. *Suomalaisen metsänhoidon opas.* Metsälehti Kustannus, Helsinki. 158 s.

LEUSCHNER, W. A. (1990): Forest regulation, harvest scheduling, and planning techniques. John Wiley & Sons, New York. 281 s.

LIHTONEN, V. (1943): Tutkimuksia metsän puuston muodostumisesta. Tuottohakkauslaskelma. *Acta Forestalia Fennica 51.2.* 214 s.

— (1944): Piirteitä metsätalouden järjestelyn rakennemuodoista Suomessa. *Acta Forestalia Fennica 52.4.* 154 s.

— (1959): Metsätalouden suunnittelu ja järjestely. WSOY, Porvoo. 355 s.

LINDHOLM, V. (1909): Hakkuulaskelma harsintataloudessa. *Suomen metsänhoitoyhdistyksen julkaisuja XXVI, 323–355.*

LOWOOD, H. E. (1990): The calculating forester: Quantification, cameral science, and the emergence of scientific forestry management in Germany. Teoksessa FRÄNGSMYR, T. – HEILBRON, J. L. – RIDER, R. E. (toim.): *The quantifying spirit in the eighteenth century.* University of California Press, Berkeley. ss. 315–342.

LYON, K. S. – SEDJO, R. A. (1983): An optimal control theory model to estimate the regional long run timber supply. *Forest Science 29, 798–812.*

— (1986): Binary search SPOC: An optimal control theory version of ECHO. *Forest Science 32, 576–584.*

LÖNNROTH, E. (1920): Ohjeita metsätalouden järjestelyssä II. Yliopistolliset metsänarvioimis-harjoitustyöt. 137 s.

— (1930): Normaalimetsä. Teoksessa ILVESSALO, L. – ILVESSALO, Y. (toim.): *Maa ja metsä IV. Metsätalous III.* WSOY, Porvoo. ss. 753–763.

MALMBORG, G. (1967): Ekonomisk planering av lantbruksföretaget. Jordbrukets Utredningsinstitut, Stockholm.

MANTEL, K. (1980): Forstgeschichte des 16. Jahrhunderts unter dem Einfluß der Forstordungen und Noe Meurers. Paul Parey, Hamburg und Berlin. 1071 s.

MARTIN, H. (1910): Die Forsteinrichtung. Dritte, erweiterte Auflage. Julius Springer, Berlin. 281 s.

Metsäsuunnitelma. (2000): Metsätalouden kehittämiskeskus Tapio.

Metsätilastollinen vuosikirja. (2002): Metsäntutkimuslaitos. 378 s.

MITRA, T. – WAN, H. Y., Jr. (1985): Some theoretical results on the economics of forestry. *Review of Economic Studies 52, 263–282.*

— (1986): On the Faustmann solution to the forest management problem. *Journal of Economic Theory 40, 229–249.*

MITRA, T. – RAY, D. – ROY, R. (1991): The economics of orchards: an exercise in point-input, flow-output capital theory. *Journal of Economic Theory 53, 12–50.*

MORING, K. (1907): Bidrag till frågan om afvärkningsberäkningen för blädningsskogar. *Finska Forstföreningens meddelanden (Suomen metsänhoitoyhdistyksen julkaisuja) XXIV, 146–163.*

RAMSEY, F. P. (1928): A mathematical theory of saving. *Economic Journal 38, 543–559.*

RECKNAGEL, A. B. (1917): The theory and practice of working plans (forest organization). Second edition. John Wiley & Sons, New York. 265 s.

SAARI, E. (1950): The sustained yield in forestry. Teoksessa *Proceedings of the Third World Forestry Congress. Special Papers No. 3.* Helsinki. ss. 277–279.

SAARI, E. – ILVESSALO, Y. (1929): Näkökohtia Suomen metsätalouden tehostamiseksi. *Silva Fennica 12.* 22 s.

SALO, S. – TAHVONEN, O. (2002a): On equilibrium cycles and normal forests in optimal harvesting of tree vintages, *Journal of Environmental Economics and Management 44, 1–22.*

— (2002b): On the economics of forest vintages. *Journal of Economic Dynamics and Control.* Painossa.

— (2002c): Optimal evolution of forest age-classes and land allocation between forestry and agriculture. *Helsinki School of Economics and Business Administration, Working papers W-286. 31 s.*

— (2002d): On the optimality of a normal forest with multiple land classes. *Forest Science 48, 530–542.*

SCHÜPFER, V. (1927): Forsteinrichtung. Teoksessa WEBER, H. (toim.): *Handbuch der Forstwissenschaft. Dritter Band.* Vierte, verbesserte und erweiterte Auflage. Verlag der H. Laupp'schen Buchhandlung, Tübingen. ss. 323–537.

SCHWAPPACH, A. (1927): Forstgeschichte. Teoksessa WEBER, H. (toim.): *Handbuch der Forstwissenschaft. Vierter Band.* Vierte, verbesserte und erweiterte Auflage. Paul Parey, Berlin. ss. 1–97.

SEDJO, R. A. – LYON, K. S. (1990): The long-term adequancy of world timber supply. Resources for the Future, Washington, DC.

SNYDER, D. L. – BHATTACHARAYYA, R. N. (1990): A more general dynamic economic model of the optimal rotation of multiple-use forests. *Journal of Environmental Economics and Management 18, 168–175.*

STOKEY, N. L. – LUCAS, R. E., Jr. (1989): Recursive methods in economic dynamics. Harvard University Press, Cambridge. 588 s.

STRANG, W.J. (1983): On the optimal forest harvesting decision. *Economic Inquiry 21, 576–583.*

SWALLOW, S. – PARKS, P. – WEAR, D. (1990): Policy-relevant nonconvexities in the production of multiple forest benefits. *Journal of Environmental Economics and Management 19, 264–280.*

SWALLOW, S., – WEAR, D. (1993): Spatial interactions in multiple-use forestry and substitution and wealth effects for the single stand. *Journal of Environmental Economics and Management 25, 103–120.*

SWALLOW, S. – TALUKDAR, P. – WEAR, D. (1997): Spatial and temporal specialization in forest ecosystem management under sole ownership. *American Journal of Agricultural Economics 79, 311–326.*

TAHVONEN, O. (1998): Bequests, credit rationing and *in situ* values in the Faustmann–Pressler–Ohlin forestry model. *Scandinavian Journal of Economics 100, 781–800.*

— (1999): Forest harvesting decisions: the economics of household forest owners in the presence of *in situ* benefits. *Biodiversity and Conservation 8, 101–117.*

— (2002): Timber production vs. old growth conservation with endogenous prices and forest age classes. *Helsinki School of Economics and Business Administration, Working papers W-316.* 27 s.

TAHVONEN, O. – SALO, S. (1999): Optimal forest rotation with *in situ* preferences. *Journal of Environmental Economics and Management 37, 106–128.*

TAHVONEN, O. – SALO, S. (2000): On Faustmann rotation and normal forest convergence. *Helsinki School of Economics and Business Administration, Working papers W-243.* 35 s.

TAHVONEN, O. – SALO, S. – KUULUVAINEN, J. (2001): Optimal forest rotation and land values under a borrowing constraint. *Journal of Economic Dynamics and Control 25, 1595–1627.*

WAN, H. Y., Jr. (1989a): Durable assets and replacement cycles. Cornell University, Working paper #419. 51 s.

— (1989b): Optimal evolution of tree-age distribution for a tree farm. Teoksessa CASTILLO-CHAVEZ, C. *et al.* (eds.): *Mathematical approaches to ecological and environmental problems, lecture notes in bio-mathematics.* Springer-Verlag, Berlin. ss. 82–99.

— (1993): A note on boundary optimal paths. Teoksessa BECKER, R. *et al.* (eds.): *General equilibrium, growth, and trade II*: *The legacy of Lionel McKenzie.* Academic Press, New York. ss. 411–426.

— (1994): Revisiting the Mitra–Wan tree farm. *International Economic Review 35, 193–198.*

ISBN 951-40-1883-4
ISSN 0358-4283